スケジューリングを考慮した冗長システムの信頼性

01400043　愛知工業大学　*中川聖夫　NAKAGAWA Toshio
01204194　流通科学大学　三道弘明　SANDOH Hiroaki

1　はじめに

多くのシステムは，ある計画期間をもつ仕事を達成するために動作している．このようなシステムに対して，新しい信頼度を定義する．

計画期間 S をもつ仕事が，あるシステムによって達成されるとする．そのとき，信頼度をシステムが故障する前に，仕事を達成する確率と定義し，その性質を調べる．ここでは，システムとして，並列と待機冗長システムを考えたとき [1]，信頼度を計算する．さらに，各種費用を与え，期待費用を最小にする最適ユニット数について議論する [2]．

2　信頼度

ある仕事の計画期間を S，その仕事を達成するために動作しているシステムの故障時間を X とし，それぞれの確率変数は独立と仮定し，その確率分布を $W(t) \equiv \Pr\{S \le t\}$，$F(t) \equiv \Pr\{X \le t\}$ $(0 \le t < \infty)$ とおく．

このような仮定のもとで，計画期間 S をもつシステムの信頼度を

$$R(W) \equiv \Pr\{S \le X\} = \int_0^\infty W(t)dF(t) = \int_0^\infty \overline{F}(t)dW(t) \tag{1}$$

と定義する．ここで，$\overline{F}(t) \equiv 1 - F(t)$ とする．信頼度 $R(W)$ は，計画期間 S をもつ仕事がシステムが故障する前に達成される確率を表す．

1) 故障分布関数 $F(t)$ が時刻 T で 1 をもつ単一分布になるならば，$R(W) = W(T)$.

2) $W(t) = F(t)$ ならば，$R(W) = 1/2$.

3) $W(t) = 1 - e^{-\omega t}$ ならば，$R(W) = 1 - F^*(\omega)$，ところで，一般に，$G^*(s)$ は $G(t)$ の LS 変換である．さらに，$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ のとき，$R(W) = \omega/(\omega + \lambda)$.

4) $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ のとき，$R(W) = W^*(\lambda)$.

5) $W(t)$ が区間 $[0, T]$ の一様分布に従うならば，$R(W) = (1/T)\int_0^T \overline{F}(t)dt$.

6) $W(t)$ が離散分布; 0 $(0 \le t < T_1)$，$\sum_{j=1}^{i} p_j$ $(T_i \le t < T_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$，1 $(T_N \le t)$，に従うならば，$R(W) = \sum_{i=1}^{N} p_i \overline{F}(T_i)$.

3　並列システム

n 個のユニットから成立する並列冗長システムを考え，各々のユニットの故障分布を $F(t)$ とする．そのとき，式 (1) から，計画期間 S をもつシステムの信頼度は [2]

$$R(n) \equiv \int_0^\infty W(t)d[F(t)]^n = \int_0^\infty \{1 - [F(t)]^n\}dW(t) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

で与えられる．とくに，$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$，$W(t) = 1 - e^{-\omega t}$ のとき，

$$R(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \frac{\omega}{\omega + j\lambda} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

さらに，費用として，システムが故障する前に仕事を達成する費用 c_0，達成する前に故障し，その後，仕事を達成する費用 $c_f (c_f > c_0)$，n ユニットを設置する費用 $ns + s_0$ を導入する．そのとき，期待費用は，

$$C(n) \equiv c_0 + (c_f - c_0)\int_0^\infty [F(t)]^n dW(t) + ns + s_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

期待費用 $C(n)$ を最小にする最適ユニット数 n^* を求める．不等式 $C(n+1) - C(n) \ge 0$ とすると，

$$\int_0^\infty [F(t)]^n \overline{F}(t)dW(t) \le \frac{s}{c_f - c_0}. \tag{5}$$

式 (5) の左辺は n の減少関数より，次の最適方策を得る．

(i) $\int_0^\infty \overline{F}(t)dW(t) \le \frac{s}{c_f - c_0}$ ならば，$n^* = 0$.

(ii) $\int_0^\infty \overline{F}(t)dW(t) > \frac{s}{c_f-c_0}$ ならば，式 (5) を満たす有限で唯一の最小の n^* $(1 \le n^* < \infty)$ が存在する．

とくに，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$W(t)=1-e^{-\omega t}$ のとき，式 (5) は

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\frac{\omega}{\omega+(j+1)\lambda} \le \frac{s}{c_f-c_0}. \qquad (6)$$

次の表は，最適ユニット数 n^* を与えている．

	λ/ω		
$s/(c_f-c_0)$	1.0	2.0	5.0
0.5	0	0	0
0.3	1	1	0
0.1	2	2	1
0.05	3	4	2
0.01	9	12	11

4 待機システム

n 個のユニットから成立する待機冗長システムを考え，各々のユニットの故障分布を $F(t)$ とする．そのとき，式 (1) から，計画期間 S をもつシステムの信頼度は

$$R(n) \equiv \int_0^\infty W(t)dF^{(n)}(t) = \int_0^\infty [1-F^{(n)}(t)]dW(t)$$
$$(n=1,2,\dots) \qquad (7)$$

で与えられる．ここで，$F^{(n)}(t)$ は $F(t)$ の n 重たたみ込みを表す．とくに，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$W(t)=1-e^{-\omega t}$ のとき，

$$R(n) = 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\omega}\right)^n. \qquad (8)$$

さらに，費用として，前節と同じ費用を導入するならば，期待費用は

$$C(n) = c_0 + (c_f-c_0)\int_0^\infty F^{(n)}(t)dW(t) + ns + ns_0$$
$$(n=0,1,2,\dots). \qquad (9)$$

期待費用 $C(n)$ を最小にする最適ユニット数 n^* を求める．不等式 $C(n+1)-C(n) \ge 0$ とすると，

$$\int_0^\infty [F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)]dW(t) \le \frac{s}{c_f-c_0}. \qquad (10)$$

とくに，$W(t)=1-e^{-\omega t}$ のとき，

$$[F^*(\omega)]^n[1-F^*(\omega)] \le \frac{s}{c_f-c_0}. \qquad (11)$$

式 (11) の左辺は n の減少関数より，次の最適方策を得る．

(i) $1-F^*(\omega) \le \frac{s}{c_f-c_0}$ ならば，$n^*=0$.

(ii) $1-F^*(\omega) > \frac{s}{c_f-c_0}$ ならば，式 (11) を満たす有限で唯一の最小の n^* $(1 \le n^* < \infty)$ が存在する．

さらに，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ のとき，式 (11) は

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\omega}\right)^n\frac{\omega}{\omega+\lambda} \le \frac{s}{c_f-c_0}. \qquad (12)$$

次の表は，最適ユニット数 n^* を与えている．

	λ/ω		
$s/(c_f-c_0)$	1.0	2.0	5.0
0.5	0	0	0
0.3	1	1	0
0.1	3	3	3
0.05	4	5	7
0.01	6	9	16

5 まとめ

システムがある計画期間をもつ仕事に対して，動作するとき，信頼度を定義した．さらに，並列と待機冗長システムに対して，期待費用を最小にする最適ユニット数を求めた．信頼性理論において，このようなスケジューリングを考慮した研究は少ないように思われる [3]．このモデルを修正し，拡張することによって，信頼性を考慮したさまざまな仕事のスケジューリングの諸問題に応用できるであろう．

参考文献

[1] I. A. Ushakov : Handbook of Reliability Engineering, John Wiley and Sons, 1994.

[2] T. Nakagawa : Optimal number of units for a parallel system, J. of Applied Probability, Vol. 21, pp. 431-436, 1984.

[3] M. Pinedo : Scheduling Theory, Algorithms, and Systems, Prentice Hall, 2002.