2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

凹型コストの下での最小取引コストインデックス・プラス・アルファ・トラッキングモデル

01102370　中央大学　＊畑木 智一　HATAGI Tomokazu
02502730　中央大学　今野 浩　KONNO Hiroshi

1　はじめに

機関投資家が資産運用を行う際に、インデックス・トラッキング手法が広く利用されている。

本論文では、インデックスをある値 $\alpha(\geq 0)$ の幅でトラックするポートフォリオの中で、取引コストを最小化するポートフォリオを構築する問題を考える。この問題は非凸型最小化問題となる。

本論文では、実用的な計算時間内で解くことが可能であること、また α が一定の範囲の範囲に入る場合には、構築されたポートフォリオのパフォーマンスがインデックスを上回ることを示す。

2　定式化

市場には n 種の資産があるものとし、それらの資産の価格を $P_j(j=1,\ldots,n)$ と表現する。そして、資産の購入量を $X_j(X_j=1,\ldots n)$ とすると、時点 t におけるポートフォリオの価値は、$\sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j$ となる。ここで、p_{jt} は、資産 j の時点 t における価格である。また、時点 t に対するインデックスの価格を $I_t(t=1,\ldots,T)$ とする。

投資家が、時点 T において M(円) 投資すると、時点 T におけるポートフォリオの価値は、$\sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j = M$ をみたさなくてはならない。

本論文では、インデックス・プラス・アルファとポートフォリオとのトラッキング・エラーを測るために絶対偏差モデルを用いた。ここで、$\theta = M/T$ と定義すると、トラッキング・エラー $W(\boldsymbol{X})$ は、

$$W(\boldsymbol{X}) = \sum_{t=1}^{T} \left| \theta I_t(1+\alpha) - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j \right| \tag{1}$$

となる。ここでの問題は取引コストを最小化し、なおかつトラッキング・エラーを一定の割合に押さえつつ、ポートフォリオを構築することである。購入資産 $\boldsymbol{X}$ に関する取引コスト関数を

$$f(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) \tag{2}$$

とする。$c_j(x_j)$ は、区分的に線形な凹関数である。ここで x_j は、ポートフォリオを構築する際の投資の割合、$x_j = p_{jT}X_j/M$ である。したがって取引コスト最小化問題は、

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{X}) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j), \\ \text{subject to} & \sum_{t=1}^{T} \left| \theta I_t(1+\alpha) - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j \right| \leq \varepsilon, \\ & \sum_{j=1}^{n} p_{jT}X_j = M, \\ & 0 \leq X_j \leq u_j, j=1,\ldots,n, \end{array}\right. \tag{3}$$

となる。

ここで ε は、許容できるインデックスとポートフォリオとの偏差、u_j は資産の購入量の上限である。

3　アルゴリズム

はじめに、以下の条件を満たす非負変数 $Y_t, Z_t(t=1,\ldots,T)$ を導入する。

$$Y_t - Z_t = \theta I_t(1+\alpha) - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j t = 1,\ldots,T,$$
$$Y_t Z_t = 0, Y_t \geq 0, Z_t \geq 0, t=1,\ldots,T.$$

すると

$$\left| \theta I_t(1+\alpha) - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}X_j \right| = Y_t + Z_t, t=1,\ldots,T. \tag{4}$$

となる。

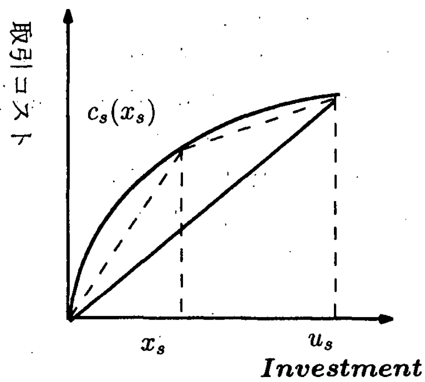
従って、問題 (3) は

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f(\boldsymbol{X}) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j), \\
\text{subject to} & \sum_{t=1}^{T} (Y_t + Z_t) \leq \varepsilon, \\
& Y_t - Z_t = \theta I_t(1+\alpha) \\
& -\sum_{j=1}^{n} p_{jt} X_j, \quad t = 1, \ldots, T, \\
& Y_t Z_t = 0, \quad t = 1, \ldots, T, \\
& \sum_{j=1}^{n} p_{jT} X_j = M, \\
& 0 \leq X_j \leq u_j, \quad j = 1, \ldots n, \\
& Y_t \geq 0, Z_t \geq 0, t = 1, \ldots, T.
\end{array}
\right. \tag{5}
$$

となる。

(5) の条件 $Y_t Z_t = 0, t = 1, \ldots, T$ は取り除くことが出来るので、この問題は線形制約式の下での凹関数最小化問題となる。そこでこの問題を、分枝限定法 [2] を用いて解く。

分枝限定法の分枝操作には、ω 一分割法を用いた。



コスト関数の分割方法

これは、凹型コスト関数と下方線形近似したコスト関数との差が最も大きい所で分割し、子問題を生成するものである。なお、分枝限定法のアルゴリズムの詳細については、当日発表する。

4 計算機実験

1995 年 1 月から 1999 年 12 月までの月次データを用いてシュミレーションを行った。購入する資産の対象は、日経 225 に含まれている銘柄とし、インデックスは日経平均株価とした。

これらのデータを用いて、問題の α の値の変化による事後パフォーマンスに与える影響、トラッキング・エラーの大小による計算時間への影響、取引コストの値などを観察した。

5 結果

まず問題は分枝限定法によっておよそ 250 秒程度で解くことができた。

また事後パフォーマンスを検証した結果、α の値を一定以下の範囲でポートフォリオを構築すると、インデックスを上回る良い事後パフォーマンスが得られるということが分かった。

以下に、投資量を 10 億円とし、1996 年から 1999 年の日経 225 に含まれる企業データを用いた場合の事後パフォーマンスを示す。

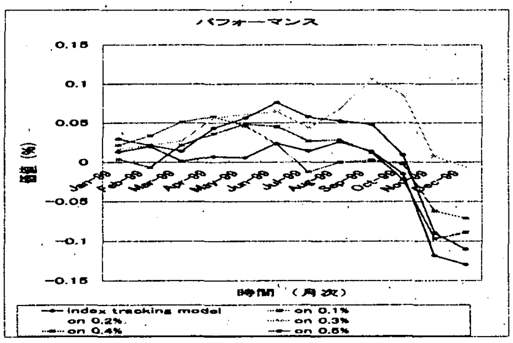


図 1: 事後パフォーマンス

この図から、α の値が一定値以下であれば、ポートフォリオのパフォーマンスはインデックス・トラッキング・ポートフォリオよりも優れていることが分かる。

なお実験結果の詳細に関しては、当日発表する。

参考文献

今野 浩,「理財工学 II」, 日科技連出版社,1998

Konno,H. and Wijayanayake,A. ,"Minimal Cost Index Tracking under Nonlinear Transaction Costs and Minimal Transaction Unit Constraints", *Int'l J of Theoretical and Applied Finance, 6 (2001) 939-957*