非凸型取引コストの下での
ロング・ショート・ポートフォリオ最適化問題に関する研究

02005580 中央大学 *秋篠 啓介 KEISUKE Akishino
01102370 中央大学 今野 浩 KONNO Hiroshi
02702020 中央大学 山本 零 YAMAMOTO Rei

1．始めに

本研究では、市場が下降方向にあるときに良いパフォーマンスを実現するといわれている「ロング・ショート・ポートフォリオ最適化問題」を考察する。既にわれわれは、[1]においてこの問題に関する報告を行なっているが、今回は、取引コストが非凸型（d.c.）関数である場合に対して報告を行なう。一般に空売り（ショートセール）を行なう場合は、第３者から資産を借りてくる事が必要であるが、一定額以上を借り入れる際には、急激に借り入れコストが増加するため、問題は非凸型の最適化問題として定式化される。

今回は、前回に提案した分枝限定法を適用する事によって、この問題が効率的に解けること、および、その際にd.c.によって構築されたポートフォリオが、通常のロング・オンリー・ポートフォリオより優れた事後パフォーマンスをもたらす事を実証する。

2．定式化

n種の資産$S_j\ (j=1,\cdots,n)$からなる市場を考える。投資総額をM、各資産への投資比率をx_jとする。

2－ｉ．キャッシュ・フローと投資可能集合

$x_j \ge 0$のとき、つまり資産jを購入する場合、資産の売買に関する取引コストが発生する。キャッシュ・フローは$x_j + c(x_j)$となる。ここで、$c(\cdot)$は区分線形な非凸型関数となる。

一方、$x_j < 0$のとき、つまり資産jを空売りする場合、第３者機関に対して取引手数料とは別に、資産に対し一定の割合の金額を証拠金として預けなければならない。

キャッシュ・フロー制約を、任意の定数$\delta(>0)$を用いて、

$$(1-\delta)M \le \sum_{j\in J_+} x_j - \gamma \sum_{j\in J_-} x_j \le M \qquad (1)$$

$$J_+ = \{ j \mid x_j \ge 0\}, \quad J_- = \{ j \mid x_j < 0\}$$

として、投資家制約条件を $\sum a_{ij} x_j \ge b_i$

と記述する。以上より、投資可能集合を

$$X = \left\{ x_1,\cdots,x_n \,\middle|\, (1-\delta)M \le \sum_{j\in J_+} x_j - \gamma \sum_{j\in J_-} x_j \le M, \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i=1,\cdots,n,\ -\alpha' M \le x_j \le \alpha M,\ j=1,\cdots,n \right\} \qquad (2)$$

と記述する。

2－ⅱ．実質期待収益率

第ｊ銘柄の取引量のうち、購入に関する取引コストを$c(x_j)$、空売りに関する取引コストを$d_j(-x_j)$とする（図１）。

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$におけるポートフォリオの期待収益率からロング・ショート・ポジションにおける取引コストを差し引いたもの、

$$r(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{j\in J_+} c(x_j) - \sum_{j\in J_-} d_j(-x_j) \qquad (3)$$

が、実質期待収益率となる。

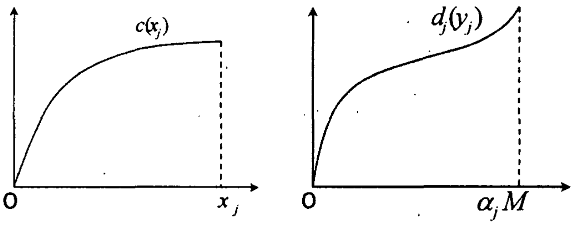


図1．取引コスト関数

2 - iii．平均・絶対偏差モデル

以上の（i）～（iii）をまとめると、ロング・ショート・ポートフォリオ問題の定式化は、以下のように定式化される。尚、wは許容できるリスク(絶対偏差)の値である。

$$\begin{aligned} &\mathit{Maximize}: \sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{j\in J_+} c(x_j) - \sum_{j\in J_-} d_j(-x_j) \\ &\mathit{subject\ to}\quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \right| \le w \\ &\qquad (x_1, \cdots, x_n) \in X \end{aligned} \tag{4}$$

3. 計算結果

計算には、日経225インデックスに含まれる銘柄の1998年1月～1998年7月の月次データを使用した。投資総額Mを1.0、1.2、1.5の3値を与えたロング・ショート・ポートフォリオの結果を図2に示す。さらに「ロング・ショート・ポートフォリオ」、「ロング・オンリー・ポートフォリオ」、「日経225」の3種類のポートフォリオにおいて、パフォーマンスを比較した結果を図3に示す。

図2から、投資総額を変化させても投資収益率には差がでていないことがわかる。また、計算時間に関しても、実用的な範囲に収まっている。そして、空売りよりも買持ちのほうが、銘柄数が多い事がわかる。

図3より、ロング・ショート・ポートフォリオは、概ねロング・オンリー・ポートフォリオや日経225よりも高いパフォーマンスを上げていることがわかる。

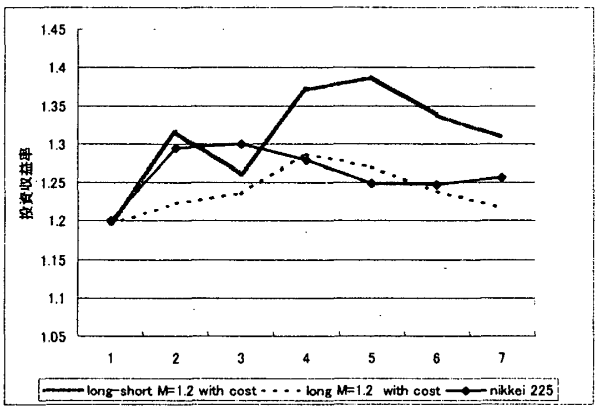
図2： 計算結果

投資総額 (billion)	1.0	1.2	1.5
投資収益率 (%)	3.56	3.54	3.48
取引コスト (%)	0.9	0.81	0.77
実質投資収益率 (%)	2.66	2.73	2.72
買持ち銘柄数	20	20	21
空売り銘柄数	11	11	12
キャッシュ・フロー	1	1	1
計算時間 (秒)	8	25	17

図3： パフォーマンス比較

4．考察

以上の結果から、市場が下降傾向にある場合は、



ロング・ショート・ポートフォリオは、ロング・オンリー・ポートフォリオより高いパフォーマンスを得られることが実証された。

今後の課題として、ポートフォリオ構築時のキャッシュ・フローに取引コストを考慮することが考えられる。つまり、(1)式を(1)′式に書き換える事である。

$$(1-\delta)M \le \sum_{j\in J_+} (x_j + c(x_j)) - \gamma \sum_{j\in J_-} x_j \le M \tag{1$'$}$$

参考文献

[1] Konno,H. ,Koshizuka,T. ,and Yamamoto,R. , " Mean-Variance Portfolio Optimization Problems under Short Sale Opportunity ", ISE02-02 Department of Industrial and Systems Engineering, Chuo University, 2002.

[2] Konno, H. ,and Wijayanayake, A.," Portfolio Optimization under D.C.Transaction Costs and Minimal Transaction Unit Constraints ",Mathematical Programming,89(2001)233-250.