サプライ・チェーンにおけるオプション取引モデル

02701890　（株）NTT データ　*矢野　順子　YANO Junko
01014780　（株）NTT データ　井階　美歩　IKAI Miho
01405390　専修大学　生田目　崇　NAMATAME Takashi
01404540　（株）NTT データ　中川慶一郎　NAKAGAWA Keiichiro

1　はじめに

本稿では，売り手・買い手・消費者の三者が存在するサプライ・チェーン構造を想定し，売り手と買い手の取引にオプションを導入するモデルを取り上げる．そして，オプション取引の有効性を検証するために，売り手と買い手それぞれの効用の変化を定義し，オプション取引が有効となるオプション・プレミアムと行使価格の条件を導く．

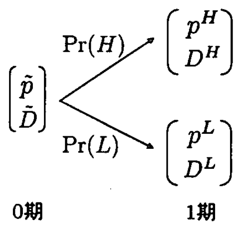

図 2: 確率変数の推移

2　マーケット・モデル

本稿では，図1のような市場で単一製品の取引を行う場合を対象とする．そして，0期と1期の2期間のシュタッケルベルグ・ゲームとしてモデル化する．つまり，0期に売り手はヨーロピアン・コール・オプションのプレミアムと行使価格を提示し，買い手はオプション数を決定する．そして1期に買い手はオプションを行使をするか否かを決定する．

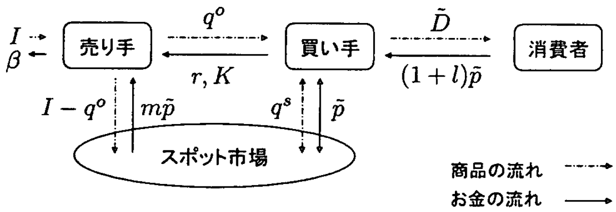

図 1: サプライ・チェーン

本稿では，1期後の経済状況を2項モデルで表現する．経済状況が「良い」場合を H,「悪い」場合を L とし，それぞれの実現確率を $\Pr(H), \Pr(L)$ とする．1期後の価格と需要は確率変数 $(\tilde{p}, \tilde{D})$ であり，図2のように推移する．

以下に本稿のモデルで使用する記号を列挙する．r, K はそれぞれオプションのプレミアムと行使価格である．q を買い手が購入するオプション数，q^o を行使するオプション数，q^s をスポット市場での売買数とする．I を売り手の在庫量，β を在庫コストとする．l を買い手から消費者への上乗せ率，m を売り手がスポット市場で売却する際のリスク・ファクターとする．また Π および π をそれぞれ売り手と買い手の利益とする．

2.1　利益関数

オプション取引を行わず，スポット市場のみで取引が行われる場合，買い手と売り手の利益関数は各経済状況に関して次のようになる．

売り手の利益（スポット市場のみ）

$$\begin{aligned}\Pi_{sp}^H &= mp^H I - \beta I \\ \Pi_{sp}^L &= mp^L I - \beta I\end{aligned}$$

買い手の利益（スポット市場のみ）

$$\begin{aligned}\pi_{sp}^H &= (1+l)p^H D^H - p^H D^H \\ \pi_{sp}^L &= (1+l)p^L D^L - p^L D^L\end{aligned}$$

また，$p^L \leq K \leq p^H$ とすれば，オプションがある場合の利益関数はそれぞれ次のように表される．

売り手の利益（オプションあり）

$$\begin{aligned}\Pi_{op}^H &= rq + Kq + mp^H(I-q) - \beta I \\ \Pi_{op}^L &= rq + mp^L I - \beta I\end{aligned}$$

買い手の利益（オプションあり）

$$\begin{aligned}\pi_{op}^H &= -rq + (1+l)p^H D^H \\ &\qquad - Kq - p^H(D^H - q) \\ \pi_{op}^L &= -rq + (1+l)p^L D^L - p^L D^L\end{aligned}$$

2.2 最適オプション数

本稿では，買い手はリスク回避的と仮定し，その効用関数 $U(\pi)$ として次式を適用する．

$$U(\pi) = -\exp\{-\pi\}$$

このとき買い手は自分の期待効用を最大にするように行動を決定する．買い手が購入する最適オプション数 q^* について次の命題が成り立つ．

命題 1 市場，経済状況および買い手の効用関数について上記の各仮定に従うとき，最適オプション数 q^* について，$\frac{r\Pr(L)}{(p^H-(K+r))\Pr(H)} < \mathrm{e}^{-l(p^H D^H - p^L D^L)}$ ならば，

$$q^* = \frac{1}{K-p^H}\left[\log\left\{-\frac{r\Pr(L)}{(K+r-p^H)\Pr(H)}\right\} + l(p^H D^H - p^L D^L)\right]$$

となり，そうでなければ $q^* = 0$ となる． ∎

このときオプションの購入に関して次の系が成り立つ．

系 1 買い手がオプションを購入することが有効となる条件は，

$$\frac{\Pr(L)}{\Pr(H)} < \frac{p^H - (K+r)}{r}\mathrm{e}^{-l(p^H D^H - p^L D^L)}$$

が成り立つことである． ∎

2.3 最適プレミアム

オプション・プレミアムは売り手が自分の期待利益を最大にするように決定する．つまり，最適プレミアムは次の問題の解である．

$$\max\ E[\Pi_{op}], \quad \text{s.t. } I \geq q$$

したがって，最適プレミアムは

$$\frac{\partial E[\Pi_{op}]}{\partial r} = rq^{*'} + q^* + (Kq^{*'} - mq^{*'}p^H)\Pr(H) = 0$$

を満たす．ただし，$q^{*'} = \partial q^*/\partial r$ である．

2.4 行使価格の条件

次に，オプション取引が売り手・買い手両者にとって有効である行使価格の条件を求める．つまり，最適プレミアム r^* に対して，買い手の最適オプション数 q^* が正となり，売り手の効用が高くなるような条件を求める．このとき次の命題が成り立つ．

命題 2 売り手・買い手ともにオプション取引が有効となる行使価格の範囲は次のように表される．

$$\frac{m\Pr(L)\mathrm{e}^{lp^H D^H} - (1 - m\Pr(H))\mathrm{e}^{lp^L D^L}}{\Pr(L)(\mathrm{e}^{lp^H D^H} - \mathrm{e}^{lp^L D^L})}p^H < K < mp^H$$ ∎

2.5 オプション取引の有効性

売り手について，オプション取引を考慮した場合とスポット市場のみの場合の期待利益の差を求めると次のようになる．

$$E[\Pi_{op}] - E[\Pi_{sp}] = -\frac{(q^*)^2}{q^{*'}} \qquad (1)$$

ここで，

$$q^{*'} = \frac{1}{K-p^H}\left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{p^H - (K+r^*)}\right) < 0$$

であり，したがって (1) 式は非負であるので，売り手にとってオプション取引は有効である．

買い手は，売り手が提示した条件に対し自らの期待効用が最大となるようにオプションを購入することができる．したがって，オプションを購入しない方が良い場合は購入しないこともできるため，買い手にとってオプション取引は有効である．

分析例については発表時に報告する．

3 おわりに

本稿では，売り手，買い手，消費者のチェーン構造における売り手と買い手の間のオプション取引モデルを示し，その有効性を示した．

謝辞：本稿について，京都大学大学院の木島正明教授からはディスカッションを通じて多くのご助言をいただきました．ここに謝意を表します．

参考文献

[1] Stefan, S. and H. Arnd: "An Options Approach to Ehhance Economic Efficincy in a Dyadic Supply Chain," S. Seuring and M. Goldbach Eds., *Cost Management in Supply Chains*, Physica-Verlag (2002).