2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

On a Commutative Class of Search Directions for Linear Programming over Symmetric Cones

-対称錐上の線形計画に対する内点法における探索方向の可換族について-

01605610 電気通信大学 村松 正和 MURAMATSU Masakazu

1 はじめに

線形計画に対する内点法は，Karmarkar の論文から数えてもその歴史が 30 年になろうとしている．その間に，内点法の中でも特に主双対内点法と呼ばれるものが，線形計画問題の解法として確固とした地位を占めるようになった．この主双対内点法は，線形計画以外に，様々な凸計画に適用されている．例えば、半正定値計画や 2 次錐計画はそのような例であり，本論文のテーマである対称錐上の線形計画も，このような凸計画の一種である．上に挙げた一連の凸計画の中では、対称錐上の線形計画が最も一般的な問題であり，半正定値計画や 2 次錐計画を特殊ケースとして含んでいる．

本論文では，線形計画に対する主双対内点法の理論的な結果を対称錐上の線形計画に拡張する．主な成果は 2 つあり，1 つは Monteiro and Zhang ([1]) における半正定値計画における探索方向の可換族 (Commutative Class) の議論を対称錐上の線形計画に拡張したことである．もう 1 つは，可換族の構造を調べることにより，そのサブクラスで理論的に良い性質を持つ巾族 (Power Class) を見い出したことである．巾族は 1 つのパラメータによって特徴づけられる探索方向の族であり、既存の NT 方向，HKM 方向はそのパラメータが特別な値を取る場合である．これらが本論文の主な成果であり，同時に現在までに得られている最良の結果となっている．

対称錐とは何か，ということはさておき，対称錐はユークリッド的 Jordan 代数というものと深い関係があることが，数学の分野では古くから知られている．本論文では，もっぱらユークリッド的 Jordan 代数の用語を用いて最適化問題，中心パス，探索方向などの概念を記述している．このため，通常の記述に慣れた人にはややわかりづらいかもしれないが，ユークリッド的 Jordan 代数を用いた解析は，本論文の議論の本質となる部分であり，避けて通ることはできない．

この項では以下，ユークリッド的 Jordan 代数について簡単に説明し，対称錐上の線形計画問題を紹介する．また，本論文の理論的成果を述べるに必要なスケーリングの概念を説明し，さらに探索方向の族の定義および関連する定理を述べる．ただし，紙数の関係から、非常にコンパクトな書き方をせざるを得ず，厳密な書き方からはずれたものとなってしまったことをお詫びしたい．正確な定義や定理は，講演にて, わかりやすい例を用いながら申し上げる予定である．もちろん，[2] にはすべて厳密に記述されているので，興味のある方は一読されたい．

2 ユークリッド的 Jordan 代数

有限次元ベクトル空間 V に，次の性質を持つ乗算 $\circ$ が定義されているとき，V を Jordan 代数と呼ぶ．

$$\text{(J1)} \qquad \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}$$
$$\text{(J2)} \qquad [L(\boldsymbol{x}^2), L(\boldsymbol{x})] = 0.$$

ただし，$L(\boldsymbol{x})$ は $L(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}$ で定義される V 上の一次変換，$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}$, $[A, B] = AB - BA$ である．また，以下では乗算には単位元 $\boldsymbol{e}$ が存在するものと仮定する．Jordan 代数 V 上に次の性質を持つ内積 $(\cdot|\cdot)$ が定義されているとき，Jordan 代数はユークリッド的である，と言われる:

$$(L(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}|L(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}) \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V.$$

ユークリッド的 Jordan 代数 V の元 $\boldsymbol{c}$ は，$\boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$ を満たすとき，射影子と呼ばれる．任意の元 $\boldsymbol{x} \in V$ は，有限個の実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ と射影子 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ ($i \neq j$ のとき $\boldsymbol{c}_i \circ \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{0}$) を用いて $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \boldsymbol{c}_j$ と表される．これを $\boldsymbol{x}$ の固有値分解という．このと

き，$\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ を $\boldsymbol{x}$ の固有値，$\{\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_r\}$ を $\boldsymbol{x}$ の Jordan frame と呼ぶ．これらは $\boldsymbol{x}$ を決めると一意に決まる．射影子の数 r は V に付随する量であり、V のランクと呼ばれる．

さて，固有値が正であるような元の集合 $\mathcal{K}\subseteq V$ は錐になる．この錐を V に付随する対称錐(symmetric cone) という．対称錐上の線形計画問題とは，

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{最小化} & (\boldsymbol{c}|\boldsymbol{x}) & \\ \text{条　件} & (\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{x})=b_i & (i=1,\ldots,m) \\ & \boldsymbol{x}\in\mathcal{K} & \end{array}\right. \tag{1}$$

と表される最適化問題である．

3 スケーリング

対称錐上の線形計画問題 (1) の双対問題は

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{条　件} & \boldsymbol{s}+\sum_{i=1}^m y_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{s}\in\mathcal{K} \end{array}\right. \tag{2}$$

となる．問題 (1) と (2) に対し，V の正則一次変換 g (ただし，$g\mathcal{K}=\mathcal{K}$ を満たす) を用いて $\tilde{\boldsymbol{x}}=g\boldsymbol{x}$, $\tilde{s}=g^{-*}s$ と変数変換することをスケーリングという．ここで，$*$ は内積に関する共役作用素を表す．

スケーリングは逆可能な一次変換であるから，これにより本質的に問題は変わらない．しかし，主双対内点法で使われるニュートン方向は，スケーリングを行なうと変化する．すなわち，スケーリングされた後でのニュートン方向 $(\tilde{\Delta}\boldsymbol{x},\tilde{\Delta}\boldsymbol{y},\tilde{\Delta}\boldsymbol{s})$ とスケーリング前のニュートン方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{s})$ の間に，

$$\tilde{\Delta}\boldsymbol{x}=g\Delta\boldsymbol{x},\quad \tilde{\Delta}\boldsymbol{s}=g^{-*}\Delta\boldsymbol{s}$$

という関係が成立しない．逆に言えば、適当なスケーリングをした後，ニュートン方向を計算し，それを逆スケーリングによって元の問題に戻せば，様々な探索方向が得られることになる．こうして得られた探索方向をスケーリング付ニュートン方向と呼ぶ．どのようなスケーリングを選ぶかが，理論的にも実装においても重要なテーマとなる．

4 可換族と巾族

ある反復点 $(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{s}^k)$ に対し，スケーリング後の点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^k$ が同じ Jordan frame を持つとき，スケーリング付ニュートン方向は可換族に属すると言われる．可換族の探索方向を用いた主双対内点法に関して，次の定理を得た．

定理 4.1 可換族に属する探索方向を用いた場合，ショートステップ主双対内点法は $O(\sqrt{r}\log 1/\epsilon)$ の反復で終了する．また，ロングステップ主双対内点法は $O(r\sqrt{\bar{\kappa}}\log 1/\epsilon)$ の反復で終了する．ここで $\bar{\kappa}$ は点列 $\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{s}^k)\,|\,k=1,2,\ldots\}$ に依存する量である．

スケーリング後の点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^k$ に関して、$\tilde{\boldsymbol{s}}^k=(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^q$ がある実数 q に対して成り立つとき，このスケーリングを用いて得られるスケーリング付ニュートン方向は巾族に含まれる，と言われる．実は巾族は，可換族に含まれることが容易にわかるので，定理 4.1 はそのまま巾族にも適用できる．さらに，次のより強力な結果も証明することができた．

定理 4.2 巾族の探索方向を用いたロングステップ主双対内点法は，そのパラメータ q に対し，$O(r^{1+|q-1|/2(q+1)}\log 1/\epsilon)$ の反復で終了する．セミロングステップ主双対内点法は，q に依存せず，$O(r\log 1/\epsilon)$ の反復で終了する．

すなわち，巾族に対しては，ロングステップ主双対内点法でも多項式時間の収束が言えるのである．(可換族では，$\bar{\kappa}$ が存在するために多項式時間の収束は言えていないことに注意．)

巾族において，$q=1$ のときはいわゆる NT 方向，$q=0$ または ∞ の場合は HKM 方向と呼ばれるものになり，それぞれの方向における反復回数の評価は定理 4.2 の系として導かれる．

参考文献

[1] R. D. C. Monteiro, and Y. Zhang, *A Unified Analysis for a Class of Path-Following Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Semidefinite Programming,* Mathematical Programming, Vol. 81, pp.281–299, 1998.

[2] M. Muramatsu, *On a Commutative Class of Search Directions for Linear Programming over Symmetric Cones,* Journal of Optimization Theory and Aplications, Vol. 112, pp. 595–625, 2002.