2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

複合リアル·オプション

couplingを用いたプロジェクト価値算出とボラティリティによる影響

02203164　京都大学 経済学研究科　芝田 隆志　SHIBATA Takashi

1　はじめに

リアル·オプションアプローチとは，金融工学でのオプション商品の評価式を実物資産に適応する理論である．リアル·オプション理論では企業の投資機会価値が単一プロジェクトとして評価されている．多段階プロジェクトに拡張した Alvares and Stenbacka [2001] は，投資を 2 段階としているが，投資意思決定は単一段階となっている．それゆえ投資機会は通常のオプションとして評価されている．しかしながら，現実の経済問題を考えると，企業は初期投資後に技術革新に成功しても必ずしもアップグレード投資するとは限らない．なぜならば，企業の初期投資を研究開発投資，アップグレード投資を製品提供による市場参入投資とした場合，企業は市場参入の投資機会に直面しても収益が製品化による費用を下回るならば，市場参入しない方が企業にとって望ましいからである．そこで，本稿では 2 段階投資かつ 2 段階意思決定として企業の投資プロジェクト価値を算出する．その結果，複合オプションとして定式化された企業価値の性質として，3 つの定理が証明される．また本稿では Hobson [1998] の coupling 議論を用いて，従来よりも直感的に理解しやすい証明を行う．

2　モデル

企業は 2 段階投資機会に直面すると仮定する．企業収益は外生的な状態変数に依存し，その確率過程は完備なフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_{t\geq 0}\})$ 上の拡散過程 $\{X_t; t \geq 0\}$ として定義され，次の式を満たすと仮定する．

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}z_t, \qquad X_0 = x \tag{1}$$

ここで z_t は標準ブラウン運動，ドリフト $\mu : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ と拡散係数 $\sigma : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+\backslash\{0\}$ は解の一意性を保証する条件を満たすと仮定する．

企業は初期費用を c_1 として初期投資を実行すると，企業は初期投資からの収益 $\pi_1 : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ を得る．また企業が初期投資すると，企業はある確率に従ってアップグレード投資機会に直面すると仮定する。アップグレード投資機会に直面する初到達時刻は確率変数 T とする．企業は初期投資をしないとアップグレード投資はできない．企業はアップグレード投資機会に直面すると，費用 c_2 を用いてアップグレード投資を行うことができ，収益 $\pi_2 : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ を得る。アップグレード実行後の収益増分は $\Delta\pi(x) := \pi_2(x) - \pi_1(x) \geq 0 : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ と仮定する．もし企業はアップグレード投資機会に直面しないならば，企業の収益は π_1 のままである．本モデルでは，中止するオプションは導入できないとする．

3　企業価値の評価と比較静学

企業の複合オプション価値は以下の通りである．

$$C(x) = \max_{\tau} E^x \left[e^{-r\tau} \left(\Pi_0 - c_1 + \max\{\Pi_1, \Pi_2\} \right) \right] \tag{2}$$

ただし，

$$\Pi_0 = \int_0^T e^{-rs}\pi_0(X_s)\mathrm{d}s$$
$$\Pi_1 = E^x \left[\int_T^\infty e^{-rs}\pi_1(X_s)\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_T \right]$$
$$\Pi_2 = E^x \left[\int_T^\infty e^{-rs}\pi_2(X_s)\mathrm{d}s - e^{-rT}c_2 \middle| \mathcal{F}_T \right]$$

確率過程 $\{X_s\}_{s\geq 0}$ と確率変数 T は独立とする．複合オプション価値の (2) 式は，2 つの要素から成り立ってい

る．括弧内における第1項は初期投資実行による累積収益であり，括弧内の第2項における $\max\{\cdot,\cdot\}$ はアップグレード投資機会のオプション価値である．それゆえ，第2項のようにオプション価値の中にオプション価値を含んでいるので，企業オプション価値は複合オプション価値として評価される．

拡散過程の強マルコフ性を用いると，企業価値はリゾルベント作用素として表わされる．

$$\begin{aligned} & C(x) \\ = \ & \max_{\tau}\ e^{-r\tau}\big((R_r\pi_1)(x) - c_1 \\ & +E^x\big[\max\big\{e^{-rT}(R_r\Delta\pi)(X_\tau) - e^{-rT}c_2,\ 0\ \big\}\big]\big) \end{aligned} \tag{3}$$

企業価値の性質について，次の3つの定理が導出される．

定理1　コンパウンドオプション価値 $C(\cdot)$ は，初期状態に対して単調増加である．すなわち，初期時点における価値 $x, y\ (x < y)$ に対して $C(x) \le C(y)$ が成立する．

定理1は，企業投資プロジェクト価値が状態変数の初期状態に関して増加関数となることを示している．すなわち初期状態が増加すればするほど企業のプロジェクト価値が増大する．

定理2　$\pi_i : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}(i = 1, 2)$ は凸性を満たす収益関数とする．このとき，複合オプション価値は初期状態に関して凸関数となる．

定理2は初期状態に対して収益関数 π_i が凸性をもつならば，リゾルベント作用素も凸性をもつという定理である．この定理2は，不確実性に対する企業価値への影響についての定理3の証明において使用される．

定理3　凸性をもつ収益関数 π_i に対して，複合オプションは拡散係数 σ に対して増加関数となる．換言すれば，$\hat{\sigma}(x) > \tilde{\sigma}(x)$ のとき，$\hat{\sigma}(x)$ におけるオプション価値は，$\tilde{\sigma}(x)$ におけるオプション価値よりも増大する．

この命題の成立する理由は以下のように説明できる．不確実性が増大すれば収益の変動が激しくなる．プロジェクト収益が高くなると企業は高い利益が得られる一方，プロジェクト収益が低くなると企業の利益は負となる．このとき企業は投資タイミングを選択できるので，利潤が負の場合には企業は投資を実行しない．それゆえ不確実性が増大すると，企業価値は増大することとなる．これが「不確実性が増大すると企業価値が増大する」という命題のメカニズムである．

「不確実性が増大すると企業価値が増大する」という命題は，単一プロジェクト評価における従来のリアルオプション研究において証明されていた．しかしながら，現実での企業は単一投資プロジェクトよりも多段階投資プロジェクトに直面する．この点に注目した先行研究である Alvares and Stenbacka [2001] では，企業投資を多段階投資として評価している．しかしながらアップグレード投資に対する意思決定がモデル内に組み込まれていない．企業投資問題を考えると，意思決定問題も複数にした方が現実の経済問題に合致している．なぜならば，企業の初期投資を研究開発投資，アップグレード投資を市場参入投資とした場合，企業は市場参入投資に直面しても収益よりも費用の方が高い場合，企業は利潤最大化の観点から市場参入しない方が望ましい場合も考えられるからである．そこで本稿では，企業プロジェクトを複数かつ意思決定も複数とモデル化した結果，企業価値を複合オプションとして評価した．

謝辞　本稿作成にあたり，指導教官の木島正明教授には大変貴重なコメントを頂いた．この場を借りて謝意を表したい．

参考文献

[1] Alvarez Luis H.R.,Rune Stenbacka[2001] "Adoption of Uncertain Multi-stage Technology Projects : A Real Option Approach", *Journal of Mathematical Economics*, Vol35, pp71-97

[2] Dixit Avinash K.,Robert S.Pindyck[1994] *Investment Under Uncertainty*, Princeton Unversity Press

[3] Hobson,David G.[1998] "Volatility Misspecification, Option Pricing and Superrepliation via Coupling", *Annals of Applied Probability*, Vol.8.No.1,pp193-205

[4] Øksendal,Bernt[1995] *Stochastic Differential Equations:An Introduction with Application*, Springer