2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

効率的フロンティア上への最小凹型取引コストリバランス問題

01102370　中央大学　今野浩　KONNO Hiroshi
02702020　中央大学　＊山本零　YAMAMOTO Rei

1　はじめに

ある時点で効率的フロンティア上に構築されたポートフォリオは、時間の経過とともに効率的フロンティアから乖離する。このため、新たな効率的フロンティア上のポートフォリオに組替える(リバランスする)ことが必要となる。本論文では、このリバランスに必要となる凹型取引コストを最小化する問題を考える。

この問題は非凸型最小化問題となるので、通常の非線型最小化アルゴリズムで最適解を求めることはできない。そこでわれわれは効率性が実証されている分枝限定法をあてはめ、この問題が実用的な計算時間で解けることを実証する。

2　定式化

市場には n 個の資産があるものとし、現在のポートフォリオを $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ とする。また、リバランス後のポートフォリオを $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする。ここで簡単のために投資可能集合を、

$$X=\{\boldsymbol{x}|\sum_{j=1}^{n}x_j=1,\,0\le x_j\le\alpha,\,j=1,2,\cdots,n\} \quad (1)$$

と記述する。

$\boldsymbol{x}\in X$ とし、$R(\boldsymbol{x})$ をその収益率としたとき、定められた期待収益率のもとで絶対偏差、

$$W(\boldsymbol{x})=E[|R(\boldsymbol{x})-E[R(\boldsymbol{x})]|] \quad (2)$$

を最小化する問題

$$w(\rho)=\min\{W(\boldsymbol{x})|E[R(\boldsymbol{x})]=\rho,\boldsymbol{x}\in X\} \quad (3)$$

を考える。このとき $w(\rho)$ を平均-絶対偏差効率的フロンティアという。平均-絶対偏差効率的フロンティア $w(\rho)$ は、区分的に線形な凸関数である。そこでこれを

$$w(\rho)=a_i+b_i\rho,\,\rho\in[\rho_i,\,\rho_{i+1}],\,i=1,2,\cdots,K. \quad (4)$$

と表現する。

次に、$\boldsymbol{x}^0$ から $\boldsymbol{x}$ にリバランスしたときの取引コストを $C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$ とする。ある期待収益率 ρ が与えられたとき、区間 $[\rho_i,\rho_{i+1}],i=1,2,\cdots,K$ の効率的フロンティア上の点にリバランスするための取引コスト最小化問題は、以下のように書くことができる。

$$P_i(\rho)\left|\begin{array}{ll}\text{minimize} & C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\\ \text{subject to} & E[R(\boldsymbol{x})]=\rho\\ & W[\boldsymbol{x}]\le a_i+b_i\rho\\ & \boldsymbol{x}\in X,\end{array}\right. \quad (5)$$

リスク指標として絶対偏差を使用したため、問題(5)の実行可能領域は凸領域となる。

3　アルゴリズム

はじめに、問題(5)の $E[R(\boldsymbol{x})]$、$W[\boldsymbol{x}]$ の部分を期待値、絶対偏差の定義に基づき、

$$\begin{aligned}E[R(\boldsymbol{x})]&=\sum_{j=1}^{n}r_jx_j\\ W[\boldsymbol{x}]&=\sum_{t=1}^{T}f_t\sum_{j=1}^{n}|r_{jt}-r_j|x_j\end{aligned} \quad (6)$$

と書きかえる。ここで r_j は銘柄 j の期待収益率、r_{jt} は銘柄 j の第 t 期での収益率である。

また、第 j 銘柄の取引量 $x_j-x_j^0$ のうち、購入量を u_j、売却量を v_j とする。また、購入時、売却時の取引コスト関数をそれぞれ $d_j^+(\cdot)$、$d_j^-(\cdot)$ とすると、総取引コスト $C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$ は

$$C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)=\sum_{j=1}^{n}d_j^+(u_j)+\sum_{j=1}^{n}d_j^-(v_j) \quad (7)$$

と表すことができる。$d_j^+(\cdot)$、$d_j^-(\cdot)$ はともに R_1^+ で単調増加で区分的線形な凹関数である。ここで変数 ψ_t、ϕ_t を導入し、問題(5)の絶対値部分を線形に変

換すると、$P_i(\rho)$ は以下のように書きかえることができる。

$$
\left|
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} d_j^{+}(u_j) + \sum_{j=1}^{n} d_j^{-}(v_j) \\
\text{subject to} \\
\quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j = \rho \\
\quad x_j - x_j^0 = u_j - v_j, j = 1, 2, \cdots, n \\
\quad \sum_{t=1}^{T} f_t(\phi_t + \psi_t) \le a_i + b_i \rho, i = 1, 2, \cdots, K \\
\quad \phi_t - \psi_t = \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j, t = 1, 2, \cdots, T \\
\quad u_j \ge 0, v_j \ge 0, u_j v_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n \\
\quad \phi_t \ge 0, \psi_t \ge 0, \phi_t \psi_t = 0, t = 1, 2, \cdots, T \\
\quad \boldsymbol{x} \in X.
\end{array}
\right.
\tag{8}
$$

目的関数は凹関数なので、この問題の最適解は実行可能領域の端点の中に存在する。この結果を用いると、相補性条件 $u_j v_j = 0$、$\psi_t \phi_t = 0$ は取り除くことができる。このため、問題 (7) は線形制約の下での凹型関数最小化問題となる。本論文では分枝限定法を用いて、この問題を求解した。

4 計算機実験

本論文では様々な手法でリバランスを行い、その結果を比較した。

1. 問題 (7)
2. 問題 (7) の目的関数を下方線形近似したもの
3. リバランス前のポートフォリオのリスクを固定して、期待収益率を最大化するようにリバランスしたもの
4. リバランス前のポートフォリオの期待収益率を固定して、リスクを最小化するようにリバランスしたもの
5. 問題 (7) において、効率的フロンティア上に正確にリバランスするのでなく、一定の許容量を与えたもの
6. 2 をにおいて、効率的フロンティア上に正確にリバランスするのでなく、一定の許容量を与えたもの

5 考察と結果

4 章で紹介した 6 つの問題を比較した結果を表 1 に示す。取引コストに関しては、5<6<3<1<2<4 の

問題	1	2	3	4
売却銘柄数	12	12	8	19
購入銘柄数	13	13	6	14
コスト (億円)	0.97	1.03	0.67	1.20
期待収益率	0.93	0.93	1.14	1.50
リスク (%)	1.89	1.89	2.06	2.39

問題	5(5%)	6(5%)	5(10%)	6(10%)
売却銘柄数	6	6	4	5
購入銘柄数	4	6	1	1
コスト (億円)	0.29	0.31	0.11	0.13
期待収益率	0.89	0.89	0.88	0.85
リスク (%)	1.87	1.87	1.87	1.86

表 1: 6ヶ月リバランス

順番となった。この結果、効率的フロンティア上に正確にリバランスを行うと、他の問題よりもコストがかかってしまうが、効率的フロンティアの制限を緩めると、コストが格段に安くなることがわかった。特に 10%の余裕を与えた場合、問題 3,4 に比べ 1/6 ～1/20 にコストを減らすことができる。また、そのリスク-リターンの構造は、十分許容できる範囲に収まることがわかった。

また、取引コスト関数に凹型関数を用いた場合と、下方線形近似関数を用いた場合では、その差は 5%から 15%程度であることがわかった。これは取引コストが十分安く、二つのコスト関数の差があまりなかったことが理由だと思われる。

これらのシミュレーション結果より、取引コスト最小化問題は十分有用であることがわかった。

今後の課題としては、より多くの資産を用いたシミュレーションを行うこと、および多期間ポートフォリオモデル (コンスタント・リバランス) との比較が考えられる。

参考文献

今野 浩「理財工学 I, II」日科技連出版,1995,1998