Deegan-Packel 指数の一般化

02302264　東京理科大学　*鶴見 昌代　TSURUMI Masayo
01307844　大阪大学大学院　谷野 哲三　TANINO Tetsuzo

1. はじめに

提携形ゲームの解には，各提携や各順列が等確率で成立するという仮定に基づいたものが多いが，実際には各順列や各提携が確率で成立するとは限らない．各プレイヤーが提携に参加する確率が異なる場合に適用できる解概念には，確率値（the probablistic value）[8] がある．また，提携形ゲームの特殊形である投票ゲームにおいては，各意思決定主体や実際に生じる議案などのイデオロギーから選好空間を形成し，この選好空間に基づく非対称な指数が考えられている [5, 6]．選好空間に基づいて日本の政党の投票力を測った代表的な研究には，小野・武藤 [4] によるものがある．しかし，この方法では，選好空間をどのように構成するか，どの次元まで考慮するかなどの点が難しい．

松井・上原 [3] は，各順列または各提携が等確率で成立するとは限らない場合にも適用可能で，選好空間を導入せずに導くことができる解概念として，Shapley-Shubik 指数に基づく投票力指数を提案し，公理系の証明と投票力分析への応用を行った．松井・上原は，実際に参議院で生じた賛成/反対のパターンが生じる確率を，賛成/反対の提携が生じる確率とみなし，この指数を応用した．また，遠藤ら [2] は，各順列または各提携が等確率で成立するとは限らない場合にも適用可能な，Banzhaf 指数に基づく投票力指数を提案し，投票力分析へ応用した．

我々のこれまでの研究では [7]，各順列または各提携などといった限界貢献度の基準が確率分布に従って生じる場合には，各プレイヤーの限界貢献度の期待値となるような解とそれを正規化した解を提案した．それぞれの解について，公理系をいくつか証明することで解の合理性を議論し，解の性質や，従来の解との関係を示した．さらに，松井らや遠藤らと同様に，実際に参議院で生じた賛成/反対のパターンが生じる確率を，賛成/反対の提携が生じる確率とみなすことにより，提案した解を用いて，実際の日本の参議院における政党の影響力を評価した．

本研究では，投票力指数の一つである Deegan-Packel 指数の一般化となる解概念として，各順列または各提携などといった限界貢献度の基準が確率分布に従って生じる場合にも適用可能な解概念をいくつか提案する．それぞれの解概念について公理化を行い，性質を明らかにする．最後に，日本の参議院における投票力分析への応用を行う．

2. 提携形ゲームと投票ゲーム

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレイヤーの集合とするとき，$v(\emptyset) = 0$ を満たす関数 $v : 2^N \to \mathbb{R}$ は，プレイヤーの集合 N をもつ提携形ゲームと考えられる．とくに，任意の $S \in 2^N$ に対して $v(S) \in \{0, 1\}$　，かつ任意の $S \subseteq T$ を満たす $S, T \in 2^N$ に対して $v(S) \le v(T)$ で，$v(N) = 1$ を満たす提携形ゲームは，投票ゲームとよばれる．

各投票ゲーム v に対して，$\mathcal{M}(v) = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$ とし，$\mathcal{M}_i(v) = \{S \in \mathcal{M} \mid S \ni i\}$ とする．このとき，重要な投票力指数である Deegan-Packel 指数は次のように定義される．

定義 1 [1] 投票ゲーム v が与えられたとき，次の値は Deegan-Packel 指数と呼ばれる．

$$\rho_i(v) = \frac{1}{\mathcal{M}(v)} \sum_{S \in \mathcal{M}_i(v)} \frac{1}{|S|}.$$

3. 加重和限界貢献度と限界型非対称解

順列や提携などのように，プレイヤーの限界貢献度の基準となりうるものを一般に x と表し，基準 x の集合を X と表す．各基準における貢献度を考えるとき，その基準に対して一意に対応する提携を割り当てることができるものと考える．すなわち，貢献度を考える上で基礎となるように適当な関数 $f_i : X \to 2^N$ が考えられるものとする．ここで，i の x に関する限界貢献度 $D_i(v; x)$ を $D_i(v; x) = v(f_i(v) \cup \{i\}) - v(f_i(v) \backslash \{i\})$ で定義する．限界貢献度 $D_i(v; x)$ は，$X = \Pi(N)$ ととったとき $D_i(v; \pi) = v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))$ となり，$X = 2^N$ ととったとき $D_i(v; S) = v(S \cup \{i\}) - v(S \backslash \{i\})$ となる．また，任意の $x \in X$ に対して $p(x) \ge 0$ を満たす $p : X \to [0, 1]$ を X 上のプロファイルと考える．このようなプロファイルは，各基準に対する重みを表す関数とみなすことも可能であるし，各基準が生じる確率を表す関数として考えることもできる．限界貢献度とプロファイルに基づく提携形ゲームの解を次のように定義する．

定義 2 [7] 次を満たす $\eta_i(v; p)$ を p が与えられたときのゲーム v における $i \in N$ の加重和限界貢献度とよぶ．

$$\eta_i(v; p) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot D_i(v; x). \tag{1}$$

また，加重和限界貢献度 $\eta_i(v; p)$ に対して，次のように導かれる $\hat{\eta}_i(v; p)$ を限界貢献度型非対称解あるいは単に限界型非対称解とよぶ．

$$\hat{\eta}_i(v; p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \eta_j(v; p)} \cdot \eta_i(v; p). \tag{2}$$

また，与えられたゲーム v が投票ゲームであるとき，$\eta_i(v; p)$，$\hat{\eta}_i(v; p)$ をそれぞれ加重和指数，限界型指数とよぶ．

われわれのこれまでの研究 [7] では，加重和限界貢献度と限界型非対称解が Shapley 値，Banzhaf 値の一般化であることを示し，公理系を証明することによって合理性の議論を行った．さらに，単調性などの合理的な性質や確率値との関係も明らかにしている．

4. Deegan-Packel 指数の一般化

貢献度の概念に基づく新しい解概念として，いくつかの新しい解概念を定義する．すべてのプレイヤーの貢献度の和に対するプレイヤーの貢献度の比をプロファイルの値で重みづけした解概念を定義する．

定義 3 X を任意の基準の集合とする．プロファイル $p : X \to \mathbb{R}_+$ と提携形ゲームが与えられたとき，値 A を次で定義する．

$$\kappa_i(v;p) = \sum_{x \in X_v[D]} \frac{D_i(v;x)}{\sum_{j \in N} D_j(v;x)} p(x).$$

ただし，$X_v[D] = \{x \in X \mid \sum_{j \in N} D_j(v;x) \neq 0\}$. また，$\sum_{j \in N} \kappa_j(v;p) \neq 0$ をみたす値 A に対して，正規化した値を次で定義する．

$$\hat{\kappa}_i(v;p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \kappa_j(v;p)} \cdot \kappa_i(v;p).$$

次に，各基準 x に対して割り当てられる提携 $f_i(x)$ がプレイヤーに依存しない場合，すなわち任意の $i \in N$ に対して $f_i(x) = f(x)$ が成り立つ場合を考える．各プレイヤーの影響力を測るとき，プロファイルの値 $p(x)$ だけでなく $v(f(x))$ も考慮する方が自然な場合がある．$E_i(v;x) = v(f(x)) - v(f(x) \setminus \{i\})$ とするとき，このような考え方から，次の定義を得る．

定義 4 X を任意の基準の集合とする．プロファイル $p : X \to \mathbb{R}_+$ と提携形ゲームが与えられたとき，値 B を次で定義する．

$$\lambda_i(v;p) = \sum_{x \in X_v[E]} \frac{E_i(v;x)}{\sum_{j \in f(x)} E_j(v;x)} p(x) v(f(x)).$$

ただし，$X_v[E] = \{x \in X \mid \sum_{j \in f(x)} E_j(v;x) \neq 0\}$ とする．また，$\sum_{j \in N} \lambda_j(v;p) \neq 0$ を満たす値 B に対して，正規化した値を次で定義する．

$$\hat{\lambda}_i(v;p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \lambda_j(v;p)} \cdot \lambda_i(v;p).$$

値 B の定義では，$X_v[E]$ に含まれない基準における影響力が考慮されていない．このような基準においては対応する提携 $f(x)$ による値を提携に含まれるプレイヤー間で等しく分け合うと考えることが自然な場合もあるかもしれない．このような考え方から，次の定義を得る．

定義 5 X を任意の基準の集合とする．プロファイル $p : X \to \mathbb{R}_+$ と提携形ゲームが与えられたとき，値 C を次で定義する．

$$\begin{aligned} \mu_i(v;p) &= \sum_{x \in X_v[E]} \frac{E_i(v;x)}{\sum_{j \in f(x)} E_j(v;x)} p(x) v(f(x)) \\ &+ \sum_{x \in X \setminus X_v[E], f(x) \ni i} \frac{1}{|f(x)|} p(x) v(f(x)). \end{aligned}$$

ただし，$X_v[E] = \{x \in X \mid \sum_{j \in f(x)} E_j(v;x) \neq 0\}$. $\sum_{j \in N} \mu_j(v;p) \neq 0$ を満たす値 C に対して，それを正規化した解として次が定義される．

$$\hat{\mu}_i(v;p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \mu_j(v;p)} \cdot \mu_i(v;p)$$

ここで提案した解のいずれもが，投票ゲームと次で定義されるプロファイルが与えられたときに，通常の Deegan-Packel 指数と一致することが証明できる．

$$p_{\mathcal{M}(v)}(S) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{M}(v)} & S \in \mathcal{M}(v) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

また，これらの解はそれぞれ公理化を行うことができる．紙面の都合上，ここでは公理系は省略し，当日紹介する．

5. 日本の参議院における各政党の投票力分析

松井・上原 [3]，遠藤ら [2]，鶴見ら [7] と同様に，議案へ賛成する政党の集合あるいは反対の政党の集合を提携とみなし，実際に生じた賛成や反対の態度から各提携の生じる確率を導く．この確率を基にして提案した解による数値を求め，従来の指数と比較した．計算結果については，当日紹介する．

6. おわりに

Deegan-Packel 指数の一般化となる解概念として，各基準に基づく限界貢献度と各基準に対する重み/確率などから得られる解を提案した．提案した解と従来の解との関係や性質を明らかにした．基準となるものの集合が提携の集合となるときの解を投票ゲームに適用することにより，実際の日本の参議院の政党の影響力を測定し，他の解による数値と比較した．

参考文献

[1] J. Deegan and E.W. Packel (1978) A new index of power for simple n-person games, International Journal of Game Theory 7 (1978) 113–123.

[2] 遠藤，鈴木，穴太，選好空間を構成せずに議案行動より直接計算する 非対称 Banzhaf 指数の一考察京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1207「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」研究集会報告集 (2001) 128–135.

[3] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集 (2000) 42–43.

[4] R. Ono and S. Muto, Party power in the house of councilors in Japan: an application of the non-symmetric Shapley-Owen index, JORSJ 40 (1997) 21–32.

[5] G. Owen, Political games, Nav. Res. Log. Quart. 18 (1971) 345–355.

[6] L.S. Shapley and M. Shubik, Chap. 3: A method for evaluating the distribution of power in a committee system, in: "The Shapley value," edited by A.E. Roth, Cambridge Univ. Press, pp. 41–48, 1988 (originally appeared in 1954).

[7] 鶴見，谷野，乾口，貢献度に基づく協力ゲームの解とその応用，京都大学数理解析研究所講究録 1241「数理最適化の理論とアルゴリズム」研究集会報告集 (2001) 30–38.

[8] R.J. Weber, Chap. 7: Probabilistic values for games, in: "The Shapley value," edited by A.E. Roth, Cambridge Univ. Press, pp. 101–119, 1988.