2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

木構造ネットワークの敷設費用配分ゲーム

東京大学　*瑞木 臨　ZUIKI Nozomu
01012384　東京大学　岩田 覚　IWATA Satoru

1　はじめに

ある村では，ガス管を敷設する際の費用を各人がどのように分担するかを決めるときに，交渉が決裂し，結果的にガス管を敷設することが出来なかったという．利用者に不満の生じない費用配分の決定法を協力ゲーム理論の枠組で考察したい．

本研究では，ガス管のモデルとして，有向根付き木 $T=(V,E)$ を考える．根はサービス源 (ガス口)，葉集合 $N=\{1,\cdots,n\}$ は各使用者に対応する．枝を供給路が敷設可能な場所であるとする．また，枝に対する費用関数 $c:E\to\mathbf{R}$ を定義する．任意の提携 $S\subseteq N$ に対して，S がサービスを得るために使う最小の枝集合を E_S と書く．そのときの費用は，

$$v(S)=\sum_{e\in E_S}c(e)$$

で与えられる．使用者をプレイヤーとし，v を特性関数とする協力ゲーム (N,v) が考えられる．このゲームを有向木敷設費用配分ゲームと言う．特性関数 v が劣モジュラ関数となる．すなわち，有向木敷設費用配分ゲームは凸ゲームである．

本研究の設定は， Megiddo [5] のモデルと似ている．彼は，根をサービス源, 根以外の全てのノードを使用者とした設定において, 仁を $O(n^3)$, シャープレイ値を $O(n)$ で見出すアルゴリズムを提案している．その後, Galil[2] は Megiddo の $O(n^3)$ のアルゴリズムの計算量を併合可能整列2分木を用いて, $O(n\log n)$ に改善している．Megiddo のモデルは，費用0の枝を付加することにより，有向木敷設費用配分ゲームに帰着できる．

一方, Granot, Mashler, Owen, Zhu[3] は Megiddo の設定を拡張したモデルにおいて仁を $O(n^2)$ で求めている．彼らの設定は, 根をサービス源, 根以外のノードを任意の人数の使用者としているものである．有向木敷設費用配分ゲームは, 一見, Granot, Mashler, Owen, Zhu[3] の設定よりも狭い枠組と感じられるが，これも，費用が0の枝も許すことにより彼らの問題設定と等価となる．

本研究では，有向木敷設費用配分ゲームにおいて，シャープレイ値が $O(n)$ で計算でき，コアがフローを用いて表現可能であることを示す．さらに，仁を $O(n\log n)$ で求めるアルゴリズムと辞書式最適配分を $O(n\log n)$ で求めるアルゴリズムを示す．

以下では，一般性を失うことなく，根に接続する枝は1本のみとし，それを e_0 とする．葉 $i\in N$ に接続する枝を $a_i\in E$ とおき，また，各枝 e に対して，e を用いる使用者の集合を $A(e)$ と書く．

2　シャープレイ値

一般のゲーム (N,v) におけるシャープレイ値は

$$\sigma_i=\sum_{S:i\in S\subset N}\frac{v(S)-v(S-\{i\})}{\binom{n}{|S|}|S|}$$

で与えられる．この右辺をそのまま計算するのは，n に関して指数時間を要する．しかし，定理1から，有向木敷設費用配分ゲームのシャープレイ値は $O(n)$ で計算できる．

定理 1 有向木敷設費用配分ゲームにおいて配分

$$x_i=\sum_{e\in E_{\{i\}}}\frac{c(e)}{|A(e)|}$$

はシャープレイ値である．

3　コア

一般のゲーム (N,v) において，コアとは，$\mathbf{R}^N$ 中の領域

$$C(v)=\left\{x\;\middle|\;\begin{array}{ll}\sum_{i\in S}x_i\le v(S), & S\subset N\\ \sum_{i\in N}x_i=v(N) & \end{array}\right\}$$

で定義される．

有向木敷設費用配分ゲームにおいて，有向木 $T=(V,E)$ 上で，根から葉へのフロー f を考える．このとき，f の流量を $\mathrm{val}(f)$ と表す．各枝 $e\in E$ において，枝流量の下限 $l(e)$ を

$$l(e)=v(N)-v(N-A(e))$$

で定める．この下限条件を満たすフロー f の全体によって，コアが表現できる．

定理 2 有向木敷設費用配分ゲームにおけるコアは，

$$C(v)=\left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_i=f(e_i), & i\in N \\ f(e)\geq l(e), & e\in E \\ \mathrm{val}(f)=v(N) & \end{array} \right\}$$

である．

4 仁

仁の定義については，$e(S,x)=v(S)-x(S)$ と仮定し，$\theta(x)$ を 2^n-2 個の $e(S,x)$ $(S\in 2^N\backslash\{\phi,N\}$ を大きい順に並べたベクトルであるとする．これを辞書式最小にするような唯一の配分が仁である．

仁を求めるアルゴリズム

1°. 葉に接続している枝集合を E_N とおく．任意の枝 $e\in E_N$ に対し，

$$\begin{array}{rcl} L_e(\varepsilon) & \leftarrow & l(e)+\varepsilon \\ \mathcal{P} & \leftarrow & E_N \end{array}$$

とする．

2°. 以下を $\mathcal{P}$ が E になるまで繰り返す．$e=(v,w)$ に対し，w を葉に近い方とする．w を始点とする枝集合を C_e とする．$e\notin\mathcal{P}, C_e\subset\mathcal{P}$ である e について，

$$\begin{array}{rcl} L_e(\varepsilon) & \leftarrow & \max\{\sum_{e'\in C_e} L_{e'}(\varepsilon), l(e)+\varepsilon\} \\ \mathcal{P} & \leftarrow & \mathcal{P}\cup\{e\} \end{array}$$

とする．

3°. $\mathcal{Q}\leftarrow\{e_0\}$ とする．

4°. $e_p\leftarrow e_0$ とする．

6° へ．

5°. $\mathcal{Q}_0$ を $E/\mathcal{Q}$ に接続する $\mathcal{Q}$ の部分集合とし，$e_p\leftarrow e\in\mathcal{Q}_0$ とする．

6°. $L_{e_p}(\varepsilon)=l(e_p)$ を満たす ε の値を ε^* とする．

7°. $f(e_p)-\sum_{e\in K^*} l(e)=|K^*|\varepsilon^*$ を満たす有向木の根と葉を分けるカット K^* の各枝について，

$$\begin{array}{rcl} f(e) & \leftarrow & l(e)+\varepsilon^*, \quad e\in K^* \\ \mathcal{Q} & \leftarrow & \mathcal{Q}\cup K^* \end{array}$$

8°. K^*_{up} をカット K^* よりも根に近い枝集合とする．$e\in K^*_{up}$ において，

$$f(e)\leftarrow\sum_{e'\in C_e} f(e')$$
$$\mathcal{Q}\leftarrow\mathcal{Q}\cup K^*_{up}$$

もし，$\mathcal{Q}=E$ ならば，終了．そうでなければ，5° へ．

ステップ 1°,2° は併合可能整列 2 分木を用いれば，$O(n\log n)$ で計算できる．その後，最悪でも，$O(n)$ かかるので，このアルゴリズムの計算量は $O(n\log n)$ である．

5 辞書式最適配分

辞書式最適配分とは，コアの辞書式最大となる配分のことである．一般に，凸ゲームは劣モジュラ・システムとみなすことが出来き，そのときのコアは基多面体となる．辞書式最適配分はゲームが凸ゲームならば，最適基となる．有向木敷設費用配分ゲームにおいて，許容領域をコアとして，配分の 2 乗和を最小化する問題の最適解が辞書式最適配分であることが知られているので [1]，この 2 次計画問題を解くことに帰着して，辞書式最適配分を求めることが可能である．Hochbaum, Hong[4] のアルゴリズムを利用すると $O(n\log n)$ で計算できる．

参考文献

[1] S. Fujishige: Lexicogarphically optimal base of a polymatoroid with respect to a weight vector. *Math. Oper. Res.*, 5 (1980), pp. 186–196.

[2] Z. Galil: Applications of efficient mergeable heaps for optimization problems on trees. *Acta Inform.*, 13 (1980), pp. 53–58.

[3] D. Granot, M. Mashler, G. Owen, W. R. Zhu: The kernel/nucleolus of a standard tree game. *Int. J. Game Theory*, 25 (1996), pp. 219–244.

[4] D. Hochbaum, S.-P. Hong: About strongly polynomial time algorithms for quadratic optimization over submodular constraints. *Math. Programming*, 69 (1995), pp. 269–309.

[5] N. Megiddo: Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree. *Math. Oper. Res.*, 3 (1978), pp. 189–196.