n 人非協力ゲームにおける主観的ゲーム

申請中　関西大学　＊古山滋人　FURUYAMA Shigehito
01401144　関西大学　中井暉久　NAKAI Teruhisa

1．はじめに

非協力ゲームにおける Nash 平衡点の概念は、この５０年間経済学に広く応用され、高く評価されている。ただ実際のゲーム実験では、Nash 平衡戦略をとらないことも多く、しかも他の戦略を選択する割合にもかなりの多様性があることが報告されている。

そのような状況を合理的に理解するために、戦略選択における「動機」に着目する。Nash 平衡点とは、全 player が「自分の利得の最大化」という動機に基づいて戦略選択した場合の均衡点であるが、現実には全 player がこの１つだけの動機で行動することは少なく、多くの動機を併せ持つものと考えられている。しかも他の player がどういう動機を持っているかは正確に知り得ず、一方的にこちらが予測するのみである。こうして他者の動機への予測を織り込んだその player にとっての主観的ゲームというものが想定される。各 player は自分にとっての主観的ゲームを闘う以外ないのであって、その Nash 平衡戦略を主観的 Nash 平衡戦略と呼ぶ。このように各 player の「主観」を取り込むことにより、上記のゲーム実験における player の行動の多様性が合理的に説明できることになる。

ここでは n 人非協力ゲームにおける主観的ゲームと主観的 Nash 平衡戦略を定義し、いくつかの動機の例を挙げる。

2．n 人非協力ゲーム

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ ：player 集合

$S_i=\left[s_{i,1},s_{i,2},\cdots,s_{i,d_i}\right]$ ：player i の純戦略集合 $(i=1,\cdots,n)$

$a_i\left(s_{1,j_1},\cdots,s_{n,j_n}\right)$ ：player $1,\cdots,n$ がそれぞれ純戦略 $s_{1,j_1},\cdots,s_{n,j_n}$ をとったときの player i の利得 $(j_k=1,\cdots,d_k\ ,\ k=1,\cdots,n\ ,\ i=1,\cdots,n)$

$x_i=\left\langle x_{i,1},\cdots,x_{i,d_i}\right\rangle$ ：player i の混合戦略

$M_i\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ ：player $1,\cdots,n$ がそれぞれ混合戦略 $x_1,\cdots,x_n$ をとったときの player i の期待利得

3．主観的ゲーム

l 個の動機（motive）$m_1,\cdots,m_l$ を考える。

$a_{i,k}\left(s_{1,j_1},\cdots,s_{n,j_n}\right)$ ：player $1,\cdots,n$ がそれぞれ純戦略 $s_{1,j_1},\cdots,s_{n,j_n}$ をとったとき、動機 m_k の立場から考えた player i の利得（これは利得関数 $a_1,\cdots,a_n$ から構成されるものである。）

<動機の例>

（ⅰ）動機 $m_1(T)$ ：group $T(\subseteq N)$ の利得最大化

$$a_{i,1}=\sum_{j\in T}a_j \tag{1}$$

もし $i\notin T$ なら、player i が他者のために喜んで犠牲的行為をしようとしていることを表している。

（ⅱ）動機 $m_2(T)$ ：group $T(\subseteq N)$ の利得最小化

$$a_{i,2}=-\sum_{j\in T}a_j \tag{2}$$

（ⅲ）動機 $m_3(T)$ ：group $T(\subseteq N)$ の最貧者の利得の最大化

$$a_{i,3}=\min_{j\in T}a_j \tag{3}$$

（ⅳ）動機 $m_4(T)$ ：group $T(\subseteq N)$ に対する超過利得の最大化

$$a_{i,4}=a_i-\max_{j\in T}a_j \tag{4}$$

これは group T に対して感じる regret（残念さ）の最小化と考えてもよい。

$$\max_{j\in T}a_j-a_i\rightarrow\min \tag{5}$$

（ⅴ）動機 $m_5(T_1,T_2)$ ：group T_1 と group T_2 の利得差

の最大化

$$a_{i,5} = \sum_{j \in T_1} a_j - \sum_{j \in T_2} a_j \qquad (6)$$

(vi) 動機 $m_6(T_1, T_2)$ ：group T_1 が group T_2 に勝つ確率の最大化

$$a_{i,6} = \mathrm{sgn}\left(\sum_{j \in T_1} a_j - \sum_{j \in T_2} a_j\right)^+ \qquad (7)$$

ただし $\mathrm{sgn}\, x$ は符号関数で、a^+ は a の positive part である。

さて、player i の立場からみた player j の動機分布を

$\theta_j^i = \langle \theta_{j,1}^i, \theta_{j,2}^i, \cdots, \theta_{j,l}^i \rangle \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$

$\theta_{j,k}^i$ ：player i の思っている player j が動機 m_k に立つ確率

とおく。

$a_j^i(s_{1j_1}, \cdots, s_{nj_n} | \theta_j^i)$ ：player $1, \cdots, n$ がそれぞれ純戦略 $s_{1j_1}, \cdots, s_{nj_n}$ をとったとき、player i の思っている player j の動機分布 θ_j^i に関する player j の期待利得

$$a_j^i(s_{1j_1}, \cdots, s_{nj_n} | \theta_j^i) = \sum_{k=1}^{l} \theta_{j,k}^i a_{j,k}(s_{1j_1}, \cdots, s_{nj_n}) \qquad (8)$$

$M_j^i(x_1, \cdots, x_n)$ ：player $1, \cdots, n$ がそれぞれ混合戦略 $x_1, \cdots, x_n$ をとったとき、player i の考える player j の期待利得

$$M_j^i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j_1=1}^{d_1} \sum_{j_2=1}^{d_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} a_j^i(s_{1j_1}, \cdots, s_{nj_n} | \theta_j^i) x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{nj_n} \qquad (9)$$

定義１：ゲーム $G^i = \left(N, \{S_j\}_{j \in N}, \{M_j^i\}_{j \in N}\right)$ を、player i の主観的ゲーム (subjective game) という。

定義２：player i の主観的ゲーム G^i における player i の Nash 平衡戦略を、player i の主観的 Nash 平衡戦略という。つまり

$$M_j^i\left(\tilde{x}_1^i, \cdots, \tilde{x}_n^i\right) = \max_{x_j} M_j^i\left(\tilde{x}_1^i, \cdots, \tilde{x}_{j-1}^i, x_j, \tilde{x}_{j+1}^i, \cdots, \tilde{x}_n^i\right)$$

$$j = 1, \cdots, n \qquad (10)$$

のとき、$\tilde{x}_i^i$ を player i の主観的 Nash 平衡戦略という。

player i は自分が期待利得

$$M_i^i\left(\tilde{x}_1^i, \cdots, \tilde{x}_n^i\right)$$

をもらえると思っているが、実際の期待利得は

$$M_i\left(\tilde{x}_1^1, \cdots, \tilde{x}_n^n\right)$$

である。

◎各 player は、自分がそれぞれの player の立場に立って、それぞれの player の動機分布を予想し、それに基づいて構成される主観的ゲームに立ち向かっていると想定し、それに対する Nash 平衡戦略（すなわち主観的 Nash 平衡戦略）を出すことになる。

Nash 平衡戦略とは、任意の player i $(1 \le i \le n)$ が動機 $m_1(\{i\})$ に従い、しかも全員が互いにそのことを正確に知っている場合の主観的 Nash 平衡戦略のことである。

◎全 player が互いに各 player の動機分布を同じに予想している場合 ($\theta_j^1 = \theta_j^2 = \cdots = \theta_j^n \quad j = 1, \cdots, n$) は、全 player の主観的ゲームが一致し、各 player はそれに対する Nash 平衡戦略を出すから、お互いに納得のいく戦略の出し方をすることになる。

反対に、動機分布の予想が player 間で著しく異なっている場合には、各自の主観的ゲーム間の乖離が大きくなり、相手が予想もしない戦略を出してくることが起こる。

結局 player 間の親疎（動機についての事前知識の正確さ）が予想の食い違いに表れることとなる。