進行方向片側のみサービス可能な巡回路問題 (2)

— 基本タイセット行列を用いた表現 —

02602400 防衛大学校情報工学科 *間方 仁一 MAGATA Jinichi
01107880 防衛大学校情報工学科 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji

1 問題の定義

平面上に枝が交差することなく描かれている無向グラフ $G = (V, E)$ を考える．**面**とは，極小の閉路で囲まれた部分をいう．このグラフを道路網と捉え，車両でサービス巡回する場合，サービスは進行方向の片側のみに限られる（日本の場合は左側）．面を構成する枝の少なくとも1本を左回り（反時計回り）に通るとき，その面を**サービスする**ということにする．

本研究では，各枝に距離 $d_e(e \in E)$ が与えられているとき，全ての面をサービスする最小の巡回路を求める問題を扱い，**片側サービス巡回路問題** (one-side-service routing problem: OSSRP) と呼ぶことにする（図1）．

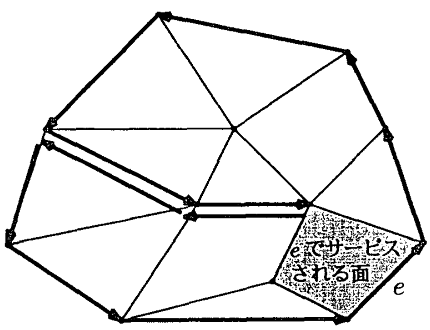

図1: 面・サービスと枝方向・実行可能解の例

OSSRPには，以下に掲げる条件の設定により，いくつかの変形が考えられるが，本稿では太字で示したような設定で議論をすすめる．

1. デポとなる点が与えられて いる／**いない**．
2. 同じ点を2度とおって **よい**／いけない．
3. 同じ枝を同じ方向に2度とおって **よい**／いけない．（前回 [1] と設定を変えた）
4. Uターンを **許す**／許さない．

2 基本タイセット行列による表現

2.1 サイクルを元にした定式化

G の両方向に枝を設けたグラフを $\overleftrightarrow{G} = (V, \overleftrightarrow{E})$ とする．$\overleftrightarrow{G}$ 上での単純有向閉路を**サイクル**と呼ぶことにすれば，OSSRPの実行可能解は，有向オイラーグラフになっているので，いくつかの**サイクルの合成**として表現できる．

$\overleftrightarrow{G}$ のすべてのサイクルが列挙できたと仮定し，その集合を C とする．$c_j (j \in C)$ はサイクル j を構成する枝距離の総和，A は G の 面の数 $\times$ C の 0-1 行列で，i 番目の面が j 番目のサイクルでサービスされるとき1，それ以外のとき0とする．このとき，OSSRPは以下のように，サイクルを元にした定式化 (P_C) ができる．

$$(\mathrm{P}_C)\ \min \quad \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{1} \quad \forall \text{面} \qquad (2)$$

$$\text{サイクル同士の連結性} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{|C|} \qquad (4)$$

通常，$|C|$ は非常に大きな数になるので，この定式化を利用する場合は，列生成法に頼らざるを得ない．ここで，有向グラフのサイクルは，基本タイセットの0-1結合で表現ができることを利用する．

2.2 基本タイセット行列

$\overleftrightarrow{G}$ における任意の木（枝方向は無視）の枝集合を T とする．また，T の補木枝集合を $\bar{T}$ とする．T に $\bar{T}$ の枝を1本加えてできる方向を無視した閉路を基本タイセットという．このとき，**基本タイセット行列** L^T を以下のように定義する：L^T は $|\overleftrightarrow{E}| \times |\bar{T}|$ 行列であり，行の上部は T に属する枝を，下部は $\bar{T}$ に属する枝を対応させる．L^T の各列の要素は，枝 $e(\in \bar{T})$ を加えてできる基本タイセット上において，e と順方向のときは1，逆方向のときは -1，それ以外は0とする．また，行列 F^T は L^T の上部に相当するものであり，$|T| \times |\bar{T}|$ 行列である．I は $|\bar{T}| \times |\bar{T}|$ の単位行列である．

$$L^T = \begin{bmatrix} F^T \\ I \end{bmatrix} \qquad (5)$$

L^T には，以下の性質が知られている [2]．

1. $\overleftrightarrow{G}$ の任意のサイクルは，L^T の列の0-1結合により，一意に表現できる．
2. L^T は完全単模である（F^T も完全単模である）．

2.3 c_j と A_j の表現

基本タイセット行列の性質1より，

$$j\text{ 番目のサイクル} = L^T\boldsymbol{\lambda}^j(\geq \mathbf{0}) \quad \forall j \in C \quad (6)$$

となる0-1ベクトル $\boldsymbol{\lambda}^j$ が一意に存在する．したがって，(1) 式の c_j も L^T を用いて (7) 式のように表すことが可能である．ここで，$\boldsymbol{d}$ は E 上での距離ベクトルを $\overleftrightarrow{E}$ 上に拡張したものである．

$$c_j = \boldsymbol{d}^t L^T \boldsymbol{\lambda}^j \quad \forall j \in C \quad (7)$$

また，M^T を 面の数 $\times |\bar{T}|$ 行列とし，各列は基本タイセット上の枝でサービスできる面の回数を示すものとする．つまり，各枝にはサービスできる面が唯一に決まっており，M^T の列は，枝 $e(\in \bar{T})$ による基本タイセット上の枝が順方向のときは対応する面に1を加算，逆方向ではその面に1を減算したものである．このとき，M^T には負のサービスという概念が含まれているが，(6) 式にあるように，各サイクルには，$\boldsymbol{\lambda}^j$ による結合した結果に非負性が必要なので，負のサービスは，サイクルが構成されるときに自動的に排除される．したがって，(2) 式の A の第 j 列 A_j も M^T を用いて (8) 式のように表すことが可能である．

$$A_j = M^T \boldsymbol{\lambda}^j \quad \forall j \in C \quad (8)$$

以上で，(P_C) からサイクル同士の連結性 (3) 式を除いた緩和問題を，基本タイセット行列 L^T とサービスできる面に関する行列 M^T を用いて，列生成法に持ち込むことができる．

2.4 基本タイセットを元にした定式化

サイクルを元にした定式化 (P_C) では，列生成法に依存することになるが，OSSRP の解はサイクルの合成で表現できることを思い起こせば，ある解 $S = \{j | x_j = 1, j \in C\}$ に対して，(9) 式のように $\boldsymbol{\mu}$ を決めれば，基本タイセットを元にした定式化 (P_L) を構築することもできる．

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{j \in S} \boldsymbol{\lambda}^j \quad (9)$$

$$\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}_L)\ \min & \boldsymbol{d}^t L^T \boldsymbol{\mu} & & (10) \\
\text{s.t.} & F^T \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} & \forall e \in T & (11) \\
 & M^T \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{1} & \forall \text{面} & (12) \\
 & \text{サイクル同士の連結性} & & (13) \\
 & \boldsymbol{\mu} \in Z_+^{|\bar{T}|}\ (:\text{非負整数}) & & (14)
\end{array}$$

ここで，L^T の下部は単位行列であり，(6) 式における $\boldsymbol{\lambda}^j$ の非負性を表しているので，実質的に意味を持つのは上部の F^T の部分だけである．また，F^T は，基本タイセット行列の性質2より，完全単模性があるので，緩和された問題を解く際には有効である．

3 サイクルの連結性制約の表現

問題 (P_L) を扱う場合は，サイクル同士の連結性 (13) 式を除去した緩和問題を解く．この緩和問題は (12) 式をラグランジュ緩和すれば，整数解が得られるので，効率的に解ける見込みが高い．しかしながら，得られた整数解（サイクル）は一般に連結性の保証がない．

OSSRP のサイクル同士の連結性制約は，TSP の部分巡回路除去制約のように，事前に一般化された形で表現することは自明ではない．しかし，得られた非連結サイクルが $S^* = \{j | x_j = 1, j \in C\}$ となっていた場合，(P_C) では S^* 以外のサイクルのいずれかが採用されていなければならないという条件 $\sum_{j \notin S^*} x_j \geq 1$ を考えることで，(3) 式の一部である妥当不等式を生成することができる．これに相当するものを，定式化 (P_L) において考える．

（連結していない）サイクル $j(\in S^*)$ を表現するために使われるタイセットは，(9) 式より，μ_k（k は (P_L) の列添字）の値も非ゼロになっており，逆も真である．したがって，(P_L) の解として非ゼロになったものを $R^* = \{k | \mu_k \neq 0\}$ とすると，以下の不等式 (15) は，(13) 式の一部を表す．

$$\sum_{k \notin R^*} \mu_k \geq 1 \quad (15)$$

一般に $|S^*| \leq |R^*|$ かつ $|C| \gg |\bar{T}|$ なので，この妥当不等式 (15) は，(P_C) で直接的に S^* 以外のサイクルを採ろうとする $\sum_{j \notin S^*} x_j \geq 1$ よりもはるかに強力である．

4 まとめ

前回 [1] で，枝に変数を対応させた定式化を紹介したが，かなり低い下界値しか得られなかった．今回，基本タイセットを利用することで，さらにコンパクトな制約式を提案し，しかも連結性に対して強力な妥当不等式を提案することができた．実際の計算機実験などは，当日報告する予定である．

参考文献

[1] 間方, 片岡: OSSRP. OR 学会 2002 春, 1-D-10.
[2] 竹中淑子: 線形代数的グラフ理論. 培風館 (1989).