確率的DEAの反復ゲームシミュレーション解法

02502560　日本大学　＊ 畑澤　文祐　HATAZAWA Fumihiro
01205220　日本大学　　篠原　正明　SHINOHARA Masaaki

1　はじめに

DEA (データ包絡分析法) は、多入力多出力システムの効率性に注目した相対評価法である。一般に DEA の CCR モデルは分数計画法、もしくは線形計画法を用いて解を求める方法が一般的であるが、我々の提案する DEA 反復シミュレーションでは、それらを用いずにゲーム論的な解法で解を求めるものである。その適用例として、データ値が確率的に変動する確率的 DEA への取り組みを紹介する。

2　DEA 反復シミュレーション解法

DEA において、評価対象を DMU(Decision Making Unit) といい、n 個の評価対象があるときには $\mathrm{DMU}_j(j=1,2,\cdots,n)$ と書くことにする。さらに注目する Unit のことを DMU_o と書く。$\boldsymbol{x_j}$、$\boldsymbol{y_j}$ を DMU_j の入力データ列ベクトル、出力データ列ベクトル、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}$ を入力項目、出力項目について評価列ベクトルとするならば、入力指向 CCR モデル (CCRI) の注目する DMU_o についてのシミュレーション解法は、(1) で表される全体効率をゲームの目的関数とする 2 グループの最大化/最小化ゲームとして解釈できる。[1],[2]

$$\left.\begin{array}{r}\max\limits_{(\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2})}\min\limits_{\boldsymbol{t}} w(A,B,\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t}) \\ =\min\limits_{\boldsymbol{t}}\max\limits_{(\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2})} w(A,B,\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{s_1}\in S_1=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^m|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1,\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{s_2}\in S_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^s|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1,\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{t}\in T=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{1}=1,\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\}\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$w(A,B,\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t})=\frac{\boldsymbol{s_1}^T A\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{s_2}^T B\boldsymbol{t}} \quad (2)$$

なお、ここで A,B は注目する DMU_o のデータをもとに以下に示すように正規化してある。

$$A=\{a_{ij}\},a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_{io}} \quad (3)$$

$$B=\{b_{kj}\},b_{kj}=\frac{y_{kj}}{y_{ko}} \quad (4)$$

ここで、$\boldsymbol{s_1}$,$\boldsymbol{s_2}$ はゲーム関数を最大化するプレーヤーグループ、$\boldsymbol{t}$ はゲーム関数を最小化するプレイヤーグループとした時の各々の混合戦略ベクトルと考えることができる。

3　確率的DEA

DEA は入出力データを確定値として与えることが一般的である。実際の問題では、データが変動することが考えられる。ここでは、データが確率変動した際の DEA 解法を示す。

$$x_{ij}\prime=x_{ij}+\varepsilon_{1ij}$$
$$y_{ij}\prime=y_{ij}+\varepsilon_{2ij}$$

$$A\prime=\{a_{ij}\},a_{ij}=\frac{x_{ij}\prime}{x_{io}} \quad (5)$$

$$B\prime=\{b_{kj}\},b_{kj}=\frac{y_{kj}\prime}{y_{ko}} \quad (6)$$

反復シミュレーションの際に、この ε_1,ε_2 を加えた A$\prime$,B$\prime$ を反復の度に与えることにより、確率変動を与えた入出力データの下での DEA ゲームの挙動を観察する。反復ゲームシミュレーションの定常状態に注目すれば、この確率的 DEA の期待値解を得る。

4　例題

以下に文献 [3](p.7) の例題 (一部変更) について、実験した結果を示す。

表1　例題1入出力データ

支店	A	B	C	D	E	F	G	H
入力 x	1	1	1	1	1	1	1	1
出力 y_1	1	2	3	4	4	5	6	5
出力 y_2	5	7	4	3	6	5	2	4

この DMU_E の y_1,y_2 のデータに関して、それぞれ区間 [0,0.5] の一様乱数を与えた際 (=E$\prime$) の効率値の変化を測定した。

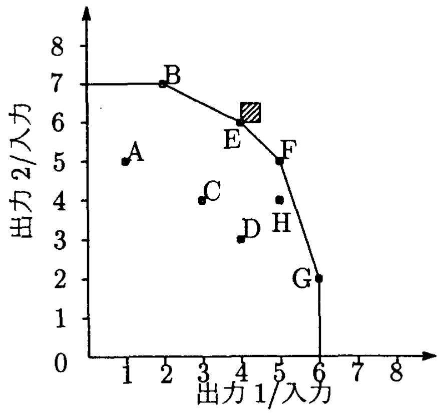

図 1: 例題 1

表 1: DMU_E 固定時の効率値比較

DMU	$E(4,6)$	$E(4.25,6.25)$	$E(4.5,6.5)$
A	0.714418	0.714418	0.714417
B	1.000182	1.000184	1.000184
C	0.700006	0.675002	0.649997
D	0.749998	0.750001	0.749997
E	1.000029	1.000022	1.000027
F	1.000029	1.000035	1.000014
G	1.000008	1.000008	1.000008
H	0.949999	0.950006	0.950012

表 2: DMU_E に [0,0.5] 一様乱数加算時 (=E/) の計算回数別効率値比較

DMU	1000 回	10000 回	100000 回
A	0.716235	0.714574	0.714417
B	1.002587	1.000367	1.000181
C	0.671133	0.665958	0.667522
D	0.750487	0.750046	0.750000
E	1.002244	1.000238	1.000032
F	1.001820	1.000145	1.000028
G	1.000833	1.000083	1.000008
H	0.950657	0.950060	0.949993

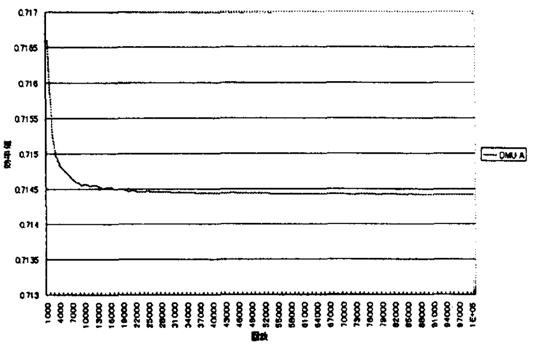

図 2: DMU_A の効率値 w

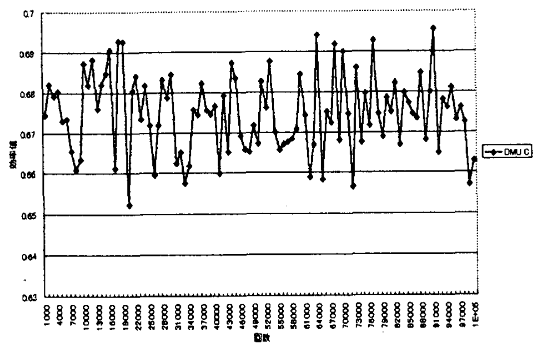

図 3: DMU_C の効率値 w

表 3: 一様乱数加算時 (=E/) の効率値比較

10 万回最終効率値	0.667522
回数 1000 回刻み平均効率値	0.674705
回数 100 回刻み平均効率値	0.675187
E 固定時 10 万回最終効率値	0.675002

5 おわりに

最も変動の影響をうける DMU_C の効率値は収束しなかったが、適当な回数刻みでの平均値は、期待される E(4.25,6.25) の確定データの効率値に近似するものであった。今回は、データ値が確率的に変動する確率的 DEA の最も簡単なパターンとして、「1 入力 2 出力、変動点 1、一様乱数、他のフロンティアへの影響がないもの」を扱った。今後の課題として、「多入力多出力、多変動点、正規乱数等、フロンティアへの影響があるパターン」についてもその有効性について検証していきたい。

参考文献

[1] 篠原正明:「DEA とゲーム理論」オペレーションズリサーチ　vol46 pp290-295

[2] 篠原正明:「CCR モデル-LP 定式化のゲーム理論ならびに多変量解析的解釈」, 第 9 回 RAMP シンポジウム論文集, pp.113-134　(1997)

[3] 刀根薫:「経営効率性の測定と改善」日科技連 (1993)

[4] H. Morita and L. M. Seiford: *Characteristics on Stochastic DEA efficiency – Reliability and probability being efficient* –Journal of Operations Research Society of Japan,Vol.42,No.4, pp.389-404,1999