2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

不確実性を取り入れたDEAモデルの考察

02302650　法政大学　＊田中敏朗　TANAKA　Toshiro
01900070　法政大学　若山邦紘　WAKAYAMA　Kunihiro

1. はじめに

DEAではデータのもつ不確実性は陽には取り入れられていない．統計的手法では得られたデータから全体像を把握するための評価を推定しようとしている．それに対して，データの値が実際に得られた状況におけるDMU(decision making unit)そのものの評価を下そうとしているのがDEAである．しかしながら，DEAで不確実性を考える必要がないということはありえず，DEAの確定的なモデルが多く開発されてきている今日では，次の段階としてデータ固有の偶発的「誤差」を陽に取り入れたDEAモデルも必要となっている．

2. 不確実性について

データの持つ不確実性を記述する数学的な方法には，確率的な変動として表す確率変数として扱う方法とあいまいなものとして表すファジィ数として扱う方法がある．当初，不確実データを扱うDEAとしては前者の確率的データによる分析があったが，多方面で実用化されるにつれてファジィ数による評価法も多く見られるようになってきた．確率的DEA法では確率的計画法による定式化がなされるのに対し，ファジィ数を扱うモデルではファジィ計画法によって定式化される．ここでは，従来のDEAモデルをα-カットを適用することにより，ファジィDEAモデルへと発展させる．

3. ファジィDEAモデル

Charnesらによって提案されたDEAモデルは一定な規模の収穫を想定している．Bankerらはその Charnesらのモデルを可変な規模の収穫に適するように修正した．

$$E_r=\max\frac{\sum_{k=1}^{t}u_kY_{rk}}{\left(v_0+\sum_{j=1}^{s}v_jX_{rj}\right)}$$

$$s.t.\qquad \frac{\sum_{k=1}^{t}u_kY_{rk}}{\left(v_0+\sum_{j=1}^{s}v_jX_{rj}\right)}\le 1,\quad (i=1,\cdots,n)\quad (1)$$

$$u_k,v_j\ge\varepsilon>0$$

今，入力値$\tilde{X}_{ij}$と出力値$\tilde{Y}_{ik}$はメンバーシップ関数$\mu_{\tilde{X}_{ij}}$と$\mu_{\tilde{Y}_{ik}}$を用いることでファジィ集合として表すことができる．このときファジィDEAモデルは次のように定式化される．

$$E_r=\max\frac{\sum_{k=1}^{t}u_k\tilde{Y}_{rk}}{\left(v_0+\sum_{j=1}^{s}v_j\tilde{X}_{rj}\right)}$$

$$s.t.\qquad \frac{\sum_{k=1}^{t}u_k\tilde{Y}_{rk}}{\left(v_0+\sum_{j=1}^{s}v_j\tilde{X}_{rj}\right)}\le 1,\quad (i=1,\cdots,n)\quad (2)$$

$$u_k,v_j\ge\varepsilon>0$$

クリスプ集合 $(X_{ij})_\alpha$ と $(Y_{ik})_\alpha$ は，α-カットにより α-レベル集合として，入力値と出力値が異なるレベルの信頼区間で表される．

$$(X_{ij})_\alpha = \left\{x_{ij} \in S(\widetilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\widetilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\right\}, \forall i,j \quad (3a)$$

$$(Y_{ik})_\alpha = \left\{y_{ik} \in S(\widetilde{Y}_{ik}) \mid \mu_{\widetilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha\right\}, \forall i,k \quad (3b)$$

ファジィ DEA モデルでは，このように異なる α-レベル集合を用いることで従来の DEA モデルの集合として変形される．また，Zadeh の拡張原理を基に DMU r の効率値のメンバーシップ関数は次のように定義できる．

$$\mu_{\widetilde{E}_r}(z) = \sup_{x,y} \min\left\{\mu_{\widetilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\widetilde{Y}_{ik}}(y_{ik}), \forall i,j,k \mid z = E_r(x,y)\right\} \quad (4)$$

このとき，α-カットによる上限と下限を求めることでメンバーシップ関数を構成する．

$$\begin{aligned} &(E_r)_\alpha^L = \min E_r(x,y) \\ &s.t. \quad (X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U, \forall i,j \quad (5a) \\ &\qquad\ (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U, \forall i,k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(E_r)_\alpha^U = \min E_r(x,y) \\ &s.t. \quad (X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U, \forall i,j \quad (5b) \\ &\qquad\ (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U, \forall i,k \end{aligned}$$

$(E_r)_\alpha^L$ と $(E_r)_\alpha^U$ がともに可逆可能であればメンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{E}_r}$ の左側の関数 $L(z)$ と右側の関数 $R(z)$ はそれぞれ，

$L(z) = \left[(E_r)_\alpha^L\right]^{-1}, R(z) = \left[(E_r)_\alpha^U\right]^{-1}$ で得られ，

メンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{E}_r}$ は

$$\mu_{\widetilde{E}_r}(z) = \begin{cases} L(z), z_1 \leq z \leq z_2 \\ 1 \quad , z_2 \leq z \leq z_3 \\ R(z), z_3 \leq z \leq z_4 \end{cases} \quad (6)$$

として得ることができる．

4. まとめ

データにファジィ数を用いることで従来の DEA モデルをファジィ DEA モデルに発展させ，不確実性を取り入れることができた．この考えは α-カットと Zadeh による拡張原理を基本としている．効率値が明確な値でなく，メンバーシップ関数として表されるので，より多くの情報が得られることが期待できる．

参考文献

[1] 刀根薫：経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—,日科技連,1993.

[2] 森田浩司：「確率的 DEA 法」，オペレーションズ・リサーチ，Vol.46, No.6, pp296-301 (2001).

[3] L. M. Seiford, Data envelopment analysis, The evaluation of the state of art (1978-1995), *Journal of Productivity Analysis*, Vol.7, pp99-138, 1996.

[4] 菅野道夫,向殿政男：ザデー・ファジィ理論,日刊工業新聞社,1992.

[5] P. YA. EKEL, Approach to Decision Making in Fuzzy Environment (1999), *An International Journal computers & mathematics with applications*, 37, pp59-71, 1999.