ＡＨＰを用いた最適ポートフォリオモデルに関する研究

02502370 法政大学 *古川公一 FURUKAWA Kouichi
01900070 法政大学 若山邦紘 WAKAYAMA Kunihiro

1. はじめに

投資決定問題における重要な資産配分問題に対するアプローチとして,平均・分散モデルや下方リスクモデルなどがある.しかし,これらのアプローチの問題点として,以下のようなことが挙げられる.

1. リスク回避度の計測が困難である.
2. 参加する個人の意思を尊重し難い.
3. 質的情報を反映することができない.

これらの問題に対して, Saaty et al. らはＡＨＰ (Analytical Hierarchy Process：階層化意思決定法) を用いたポートフォリオ構築法を提案している.これらの手法は,一対比較行列が決まると,投資比率が決定するため,このままでは投資比率に諸制約を組込むことができない.しかし,資産配分問題においては,

- 運用部門内での上下限ルール
- 企業年金運用の５：３：３：２規制
- 売買回転率制約

等も課されるのが現状である.

そこで,本研究では,ＡＨＰの持つ長所を取込みつつ,これらの諸制約を組込むことができるＡＨＰ・数理計画モデルの構築を試みる.

2. ＡＨＰ (固有ベクトル法)

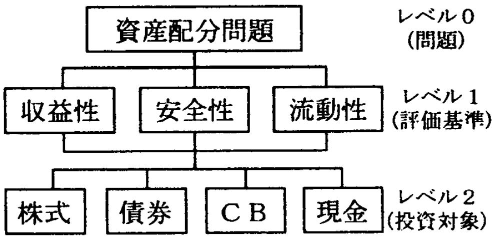

図 1: 階層図の例

ＡＨＰでは,「代替案」を決めるための「評価基準」を定め,図１のような階層図を用いることによって,その階層構造を表現する.

次に,ＡＨＰによる投資比率の決定方法を簡単に記号を用いて以下に示す.

$N+1$：レベル数

M_i ：レベル i における評価基準の数,
$(i=1,\ldots,N-1)$, ただし,$M_0=1$

M_N ：レベル N におけ代替案 (投資対象) の数

$P_i^{(j)}$ ：レベル i の評価基準 j に対する一対比較行列
$P_i^{(j)} \in R^{M_i \times M_i}$,$(i=1,\ldots,N\ ,\ j=1,\ldots,M_{i-1})$

$\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ ：$P_i^{(j)}$ に対する最大固有ベクトル,
$\boldsymbol{W}_i^{(j)} \in R^{M_i}$,$(i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,M_{i-1})$
$P_i^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)} = \lambda_{max,i}^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)}$, $\lambda_{max,i}^{(j)}$ は最大固有値

Y_i ：レベル i の評価基準に対する
最大固有ベクトルを横に並べた行列,
$Y_i = [\boldsymbol{W}_i^{(1)},\ldots,\boldsymbol{W}_i^{(M_{i-1})}] \in R^{M_i \times M_{i-1}}$,
$(i=1,\ldots,N)$

$\boldsymbol{Z_i}$ ：レベル i の評価基準に対する
合成ウェイトベクトル,
$\boldsymbol{Z_i} = Y_i\boldsymbol{Z_{i-1}} \in R^{M_i}, (i=1,\ldots,N-1)$

$\boldsymbol{Z_N}$ ：代替案に対する合成ウェイトベクトル

ＡＨＰにおいて,投資比率$\boldsymbol{Z_N}$は次のようにして求めることができる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z_N} &= Y_N\boldsymbol{Z_{N-1}}\\ &= Y_N(Y_{N-1}\boldsymbol{Z_{N-2}})\\ &= \ \vdots\\ &= Y_NY_{N-1}\cdots Y_2Y_1 \qquad (1)\end{aligned}$$

これらの手法は,投資家の意思 (価値観) を反映する一対比較行列に対する最大固有ベクトルを使って投資比率を求めていく手順を取るので,投資比率に対して実務上の諸制約を直接組込むことができない.そこで,ＡＨＰの持つ長所を生かしつつ,諸制約を組込めるＡＨＰ・数理計画モデルを構築する.

3. ＡＨＰ・数理計画モデルの構築法

投資比率$\boldsymbol{Z_N}$に制約を加えることは,結果として投資家の情報を表す一対比較行列に制約を加えることになる.そこで,ＡＨＰの長所を

生かすために, 投資比率制約を加えても, 一対比較行列 $P_i^{(j)}$ をなるべく変更しないことを目的とするモデル化を考える. そのモデルは, 以下のような非線形計画問題 **PMA-0**(基本モデル) として定式化できる.

[PMA-0]

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{dev}[G(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)}), (Q_i^{(j)}, P_i^{(j)})] \\ & ,(i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,M_{i-1}) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & Q_i^{(j)} \boldsymbol{w}_i^{(j)} = \gamma_{max,i}^{(j)} \boldsymbol{w}_i^{(j)} && (3) \\ & \boldsymbol{z}_i = X_i \boldsymbol{z}_{i-1}^{(j)}, \quad \text{ただし}, z_0 = 1, \\ & \quad X_i = [\boldsymbol{w}_i^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{w}_i^{(M_{i-1})}] && (4) \\ & \boldsymbol{e}_i^T \, \boldsymbol{w}_i^{(j)} = 1 && (5) \\ & \boldsymbol{w}_i^{(j)} \geq \mathbf{0} && (6) \\ & \boldsymbol{z}_N \in \boldsymbol{F} && (7) \\ & \tfrac{1}{H} \leq Q_{i,(a,b)}^{(j)} \leq H && (8) \\ & \frac{\gamma_{max,i}^{(j)} - M_i}{M_i - 1} \leq \boldsymbol{C.I.}^{max} && (9) \\ & (a=1,\ldots,M_{i-1}, b=a+1,\ldots,M_i) \\ & (i, j \text{ の条件は (2) と同様.}) \end{aligned}$$

[PMA-0] は一般に多目的計画問題として定式化される. そのとき, $\mathbf{dev}[*,*]$ は, 2つのパラメータの差異を表す関数, $\boldsymbol{F}$ は投資比率 $\boldsymbol{z_N}$ の諸制約空間, $Q_i^{(j)}, \boldsymbol{w}_i^{(j)}, \gamma_{max,i}^{(j)}, \boldsymbol{z}_i, X_i$ は前頁で示した $P_i^{(j)}, \boldsymbol{W}_i^{(j)}, \lambda_{max,i}^{(j)}, \boldsymbol{Z}_i, Y_i$ に相当する決定変数である. $\frac{1}{H}, H$ は一対比較行列の下限値と上限値 (一般に $\frac{1}{9}$~9), $\boldsymbol{C.I.}^{max}$ は整合度を表す.

差異を表す関数 $\mathbf{dev}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ として, 次のような関数が考えられる. ここで, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ともに M 個の要素からなるベクトルもしくは行列 ($\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\}, (i=1,\ldots,M)$) とする.

オープンL字関数

$$\begin{aligned} \mathbf{dev}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (1-\beta_p) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} |a_k - b_k| \\ + \beta_p \cdot \max_k |a_k - b_k| \quad (10) \end{aligned}$$

問題 **PMA-0** は非凸な非線形制約式を含むため, 全域的最適解を求めるためには極めて解きにくい問題である. そこで、AHPの構造をなるべく守りつつ, 問題 **PMA-0** に対する代替的なモデルで更に検討する.

4. 代替的なアプローチ

4.1 代替モデル1

最大固有ベクトル $\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ をなるべく変更しないモデルは非線形計画問題 **PMA-1** として定式化できる.

[PMA-1]

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{dev}[\boldsymbol{W}_i^{(j)}, \boldsymbol{w}_i^{(j)}] \\ & ,(i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,M_{i-1}) \quad (11) \\ \text{s.t.} \quad & (4)\sim(7) \text{ 式} \end{aligned}$$

4.2 代替モデル2

評価基準に対するウェイトベクトル $\boldsymbol{Z}_i$ をなるべく変更しない2つの目標を持つモデルは線形計画問題 **PMA-2** として定式化できる.

[PMA-2]

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{dev}[\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{z}_i], \ (i=1,\ldots,N-1) && (12) \\ \min \quad & \mathbf{dev}[\boldsymbol{z}_i, Y_i \boldsymbol{z}_{i-1}], \ (i=2,\ldots,N) && (13) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{z}_i = 1, (i=1,\ldots,N) && (14) \\ & \boldsymbol{z}_i \geq \mathbf{0}, (i=1,\ldots,N-1) && (15) \\ & \boldsymbol{z}_N \in \boldsymbol{F} && (16) \end{aligned}$$

4.3 代替モデル3

最終的に得られた投資ウェイトベクトル $\boldsymbol{Z}_N$ をなるべく変更しないモデルは線形計画問題 **PMA-3** として定式化できる.

[PMA-3]

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{dev}[\boldsymbol{Z}_N, \boldsymbol{z}_N] && (17) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{z}_N = 1 && (18) \\ & \boldsymbol{z}_N \in \boldsymbol{F} && (19) \end{aligned}$$

5. 数値実験

基本モデルと3つの代替モデルに対する数値例は紙面の関係上, 発表会当日に紹介する.

参考文献

[1] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法AHP入門, 日科技連,1986

[2] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和：経営の多目標計画, 森北出版,1987

[3] 批々木規雄：目標ベクトル法で想定する効用関数に関する考察, 日本経営工学会誌,Vol.46,No.6(1995),599-604.