2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

指数型ハフモデルに基づく店舗の立地競争

01107680　慶應義塾大学　　栗田　治　KURITA Osamu

1. はじめに

線分都市で2つの店舗が立地競争を繰り広げるモデルを提案する．周知のホテンリングの立地競争モデル[1]は客を最近隣の店舗に割り当てた．本研究は到来頻度を，店の魅力や店への距離に弾力的な指数型ハフモデル[2]で与える点に特徴がある．結果として次のことが示される：(1) 2つの店舗の魅力(規模)が等しいときは，都市中心部への集中という形でナッシュ均衡が成立する；(2) 2つの店舗の魅力(規模)が異なるときは，集中立地に帰着する場合と振動が繰り返される場合とがある．

ハフモデル[3](と派生モデル)を前提とする新規店舗の最適立地モデルは様々に考案されている[4,5]．しかし，ハフモデルを前提とする立地競争に焦点を当てた分析は鮮ないように見受けられる．

2. 定式化

線分都市$[0, L]$を想定し，店1と店2の位置をx_1とx_2で与える．2つの店は同一種類の品物を商っており，都市内の客を奪い合うものとする．各々の魅力度指標(床面積や品揃え数)をS_1ならびにS_2としよう．都市内には均質な交通手段が用意されているものとし，任意の2点間を速さwで移動出来るものとする．このとき位置uの客の店jへの所要時間$t_j(u)$は，移動距離$r_j(u) = |x_j - u|$をwで除して与えられる：

$$t_j(u) = \frac{r_j(u)}{w} = \frac{|x_j - u|}{w} \quad (j = 1, 2). \qquad (1)$$

位置uの客が店jを選ぶ頻度$p_j(u)$は次式の通りに指数型ハフモデルで与える：

$$p_j(u) = \frac{S_j^\alpha e^{-\gamma t_j(u)}}{S_1^\alpha e^{-\gamma t_1(u)} + S_2^\alpha e^{-\gamma t_2(u)}} \quad (j = 1, 2). \qquad (2)$$

圏域の客の分布$\rho = \rho(u)$ $(0 \le u \le L)$は

$$\int_0^L \rho(u) = 1 \qquad (3)$$

と規準化して与えておく．このとき(便宜上$x_1 \le x_2$という条件の下で)店1の占有率ϕ_1を求める(店2の占有率は勿論$\phi_2 = 1 - \phi_1$)：

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \int_0^L p_1(u)\rho(u)\,du \\ &= \int_0^{x_1} \frac{\rho(u)\,du}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{\gamma \frac{x_1 - x_2}{w}}} \qquad (4) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho(u)\,du}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{\gamma \frac{2u - x_1 - x_2}{w}}} + \int_{x_2}^{L} \frac{\rho(u)\,du}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{\gamma \frac{x_2 - x_1}{w}}}.\end{aligned}$$

$x_2 < x_1$のときの市場占有率ϕ_1を知りたければ，上式の(x_1, S_1)と(x_2, S_2)を入れ換えればよい．

(4)から，市場占有率が移動速度と時間抵抗係数の比(w/γ [km])の函数であることが分かる．(4)を吟味することによって，次の成立が判明する：

$$\lim_{\gamma/w \to 0} \phi_1 = \frac{S_1^\alpha}{S_1^\alpha + S_2^\alpha}, \qquad (5)$$

$$\lim_{\gamma/w \to \infty} \phi_1 = \int_0^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \rho(u)\,du. \qquad (6)$$

(5)からモータリゼーションの進展(速さwの増大や時間抵抗係数γの減少)が，市場占有率を商業集積地の規模のα乗の比に回帰させる，という構造が明示される．交通が便利になると，商業の本来の実力に見合った売上がもたらされる，という訳である．(6)はその逆に移動が不便な場合の売上が，商業集積地を母点とするボロノイ圏域内の人口に比例することを意味している．客の移動が不便なときは，何処に出店するかが重要なのである(地の利が大切)．

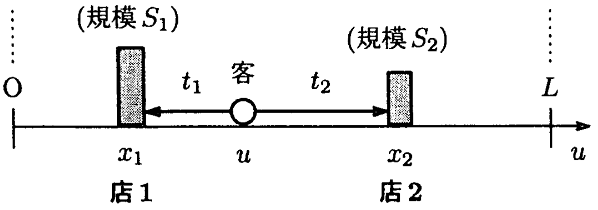

図1　都市$[0, L]$での店x_1とx_2ならびに客u.

3. 均一人口分布の下での立地競争

人口分布の具体例として，最も基本的で様々な見積もりの目安ともなる均一分布を想定しよう：

$$\rho(u) = \frac{1}{L} \quad (0 \le u \le L). \qquad (7)$$

このとき(4)を具体的に計算すると，次を得る：

$$\begin{aligned}L \cdot \phi_1 &= a + \frac{x_1}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{-\frac{\gamma a}{w}}} + \frac{L - x_2}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{\frac{\gamma a}{w}}} \\ &+ \frac{w}{2\gamma} \ln \frac{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{-\frac{\gamma a}{w}}}{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^\alpha e^{\frac{\gamma a}{w}}}. \qquad (8)\end{aligned}$$

ただし，$a = x_2 - x_1$と定義した．

数値例をL = 100km, α = 1, (x_1, x_2) = (25km, 75km), $(S_1, S_2) = (3, 2)$と与える．図2は移動

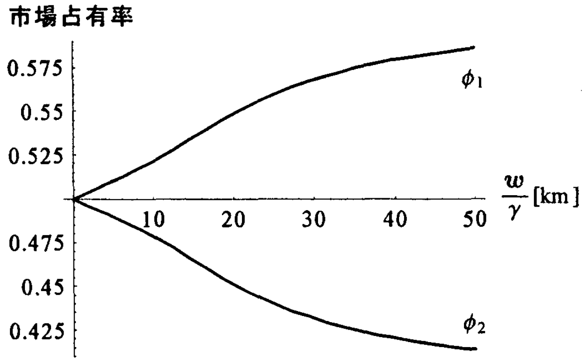

図2　均一人口分布下での移動速度-時間抵抗比 w/γ の市場占有率への影響 ($L = 100$km, $\alpha = 1$, $(x_1, x_2) = (25\text{km}, 75\text{km})$, $(S_1, S_2) = (3, 2)$).

速度-時間抵抗比 w/γ が市場占有率に効く様子を示している．数値例のように $S_1 > S_2$ の場合，ϕ_1 は w/γ の増加函数である．そして，$\alpha = 1$ としたので，(5) から $\phi_1 \to S_1/(S_1 + S_2) = 3/5$ $(w/\gamma \to \infty)$ が成り立つ．また，(x_1, x_2) が対称な配置なので，(6) によって $\phi_1 \to 1/2$ $(w/\gamma \to 0)$ も成り立つ．

いま x_i を所与として x_j の最適な立地点を求めるには $(i \neq j)$，ϕ_j を x_j について最大化すればよい．この最適解を次の如くに表現する：

$$x_1 = x_1^*(x_2), \tag{9}$$
$$x_2 = x_2^*(x_1). \tag{10}$$

店舗の移動にはコストが全くかからないものと仮定し，(9)，(10) の逐次代入型の立地競争が繰り広げられるものとする．この競争の例示が図3ならびに図4である．

図3には $L = 100$km，$w/\gamma = 10$km，$S_2/S_1 = 1$ のときの，市場占有率 $\phi_1(x_1, x_2)$ の等高線ならびに (9)，(10) の曲線が描かれている．当然，$x_1 = x_1^*(x_2)$ は等高線の尾根を，$x_2 = x_2^*(x_1)$ は等高線の谷を辿っている．このように，$S_1 = S_2$ の場合は，逐次代入型の立地競争は都市中央部への集中に帰着する．

図4には $L = 100$km，$w/\gamma = 10$km，$S_2/S_1 = 4.0$ のときの，市場占有率 $\phi_1(x_1, x_2)$ の等高線ならびに (9)，(10) の曲線が描かれている (店2の魅力が店1の4倍)．この場合，(9) の函数が $x_2 = L/2$ で分岐するという特徴がある．$S_1 \leq S_2$ の場合に，函数 $x_2 = L/2$ が $x_2 = L/2$ で不連続になるための必要十分条件は

$$\frac{w}{\gamma} < \frac{L}{2} \frac{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\alpha} - 1}{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\alpha} + 1} \tag{11}$$

であることが判明する (証明は割愛)．また，逐次代入型の立地競争が無限の振動に陥ることが判明する．

4. 今後の課題

店舗数が3以上の場合の解析も (パズルの穴埋め的には) 興味の対象となる．2次元平面における解析的

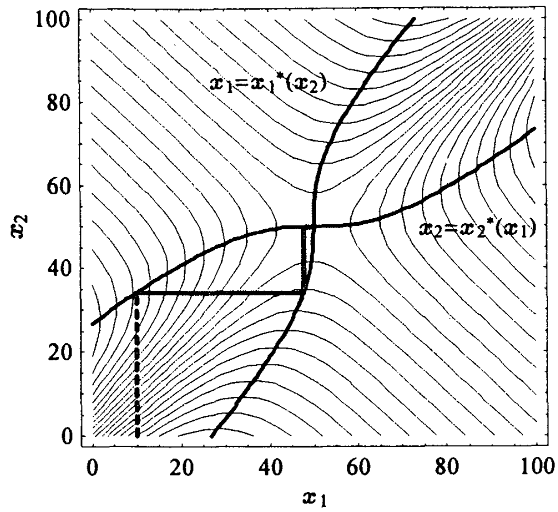

図3　市場占有率 $\phi_1(x_1, x_2)$ の等高線ならびに店1(x_1) と店2(x_2) の立地競争．($L = 100$km，$w/\gamma = 10$km，$S_2/S_1 = 1.0$)

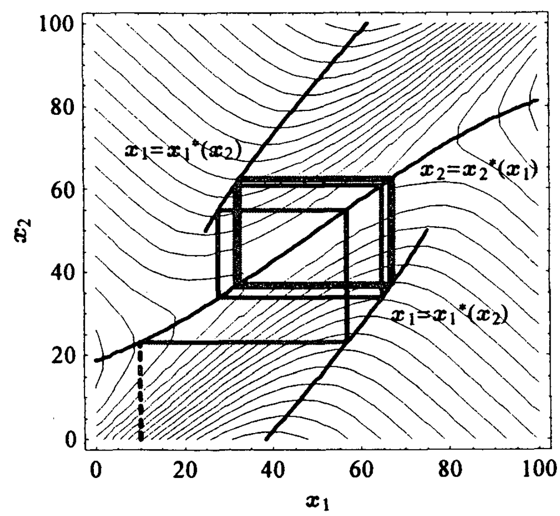

図4　市場占有率 $\phi_1(x_1, x_2)$ の等高線ならびに店1(x_1) と店2(x_2) の立地競争．($L = 100$km，$w/\gamma = 10$km，$S_2/S_1 = 4.0$)

特徴の解明ならびに数値実験にも挑戦すべきである．また，指数型のハフモデルでなく (古典的な) 冪型ハフモデルを導入して立地競争を記述することも興味深い．ただし，この場合は市場占有率が陽に導出されないので，数値積分に基づく解析が必要となる．

参考文献

[1]Hotelling, H.(1929) : Stability in Competition, *Economic Journal*, Vol. 39, pp. 41 − 57.

[2] 栗田　治 (2002) : 高速輸送機関の発達が都市の商業売上高に与える影響ーハフモデルに基づく解析学的分析ー，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集，2−B−6, pp.166 − 167.

[3]Huff,D.L.(1964): Defining and Estimating a Trading Area, *Journal of Marketing*, Vol.28, No.3, pp.34 − 38.

[4]Craig, C.S., A. Ghosh and S. Mclafferty(1984): Models of the Retail Location Process : A Review, *Journal of Retailing*, Vol. 60, No. 1, pp. 5 − 36.

[5] 中西正雄 (1983) : 小売吸引力の理論と測定，千倉書房.