ファジィランダム作付計画問題について
A Crop Planning Model with Fuzziness and Randomness

大阪大学大学院　＊豊永 亮　Tasuku TOYONAGA
01013704　流通科学大学　伊藤 健　Takeshi ITOH
01005194　大阪大学大学院　石井 博昭　Hiroaki ISHII

1．はじめに

農業経営における意思決定問題を解くにあたって，制約条件や目的関数の係数は通常確定値で与えられるが，現実には不確定な場合が多い．どの作物をどれだけの面積で栽培するかを決定する作付計画問題について問題を解く上で，重要な要素である作物の利益係数（単位面積あたりの利益）は作付期においては事実上不確定であり，出荷時にはじめて明らかになる．このことから，数理モデルを構築する際に利益係数を定数として扱う従来の方法は，その特定の困難さから現実味に欠ける．しかし，実際には熟練者がある程度その値を推測することは可能であり，ファジィ集合を利用することで，より現実に即した定式化が可能になる．本研究では，作付計画問題における利益係数をファジィ数としたうえで目的関数値にファジィ目標を設定し，その可能性測度を最大化することにより最適性を定義し，その効率的解法を提案する．さらに，ファジィ数とした利益係数が離散的な確率変動をするファジィランダムモデルへと発展させる．

2．問題の定式化と解法

2.1 作付計画問題

ある農家について，耕作可能な土地の面積をR，提供可能な総労働時間をW，作物$i(=1,2,\cdots,n)$の作付面積をx_i，作物iの単位面積あたりの利益（利益係数）をc_i，作物iを単位面積栽培するのに必要な労働時間（労働係数）をw_iとする．

農家は作付面積の合計をR以下，労働時間もW以下にしつつ総収益をなるべく大きくしたいので

$$
\begin{aligned}
\text{P1}:\quad & \text{Maximize} \quad Y=\mathbf{c}'\mathbf{x}\\
& \text{subject to} \quad x_1+x_2+\cdots+x_n \le R\\
& \qquad \mathbf{w}'x \le W\\
& \qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

のようなLP問題により最適作付計画が求められる．ここで，$\mathbf{c}'=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\mathbf{w}'=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$であり，この問題を作付計画問題と呼ぶ．

2.2 ファジィ作付計画モデル

作物iの利益係数をC_iとし，単峰型メンバシップ関数をもつファジイ数と考えれば，利益係数ベクトル$\mathbf{C}'=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$は

$$\mu_{\mathbf{C}}(\mathbf{c})=L\left((\mathbf{c}-\mathbf{d})'U(\mathbf{c}-\mathbf{d})\right)$$

のようなメンバシップ関数をもつファジィ集合として定義できる．ただし，$\mathbf{d}'=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$であり，$U$は$n\times n$の非負成分をもつ対角行列で$\mu_{C_i}$の広がりに対応し，$L$は$L:[0,+\infty)\to[0,1]$；$L(0)=1$を満たす連続減少関数である．

このとき，$\mathbf{C}$がファジィ集合であることから，P1におけるYもファジィ数となり，そのメンバシップ関数は以下の定理から得られる．

定理 1

$\mu_{\mathbf{C}}(\mathbf{c})=L\left((\mathbf{c}-\mathbf{d})'U(\mathbf{c}-\mathbf{d})\right)$のとき$Y=\mathbf{C}'\mathbf{x}$のメンバシップ関数$\mu_Y(y)$は次のようになる．

$$\mu_Y(y)=L\left(\frac{(y-\mathbf{d}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'U^{-1}\mathbf{x}}\right)$$

目的関数がファジィ数であれば，直接最大化することができないので，“Yはだいたいθより大きい”というファジィ目標Gを設定し，そのメンバシップ関数を

$$\mu_G(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t<\theta_l)\\ \dfrac{t-\theta_l}{\theta-\theta_l} & (\theta_l\le t<\theta)\\ 1 & (\theta\le \mathrm{t}) \end{cases}$$

とする．このファジィ目標Gの実現可能性を最大化するために，次のような可能性測度最大化問題を考え，その最適解を求める．

P2 : Maximize $\prod_Y(G)=\sup_y \min\{\mu_Y(y),\mu_G(y)\}$

subject to $x_1+x_2+\cdots+x_n \le R$

$\mathbf{w}'\mathbf{x} \le W$

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

いま，関数L，μ_Gについて

$$L^*(t)=\begin{cases}\min\{r \mid L(r)\le t\} & (0\le t<1)\\ 0 & (t=1)\end{cases}$$

$$\mu_G^*(t)=\begin{cases}0 & (t=0)\\ \min\{r \mid \mu_G(r)\ge t\} & (0<t\le 1)\end{cases}$$

を定義すれば，次のような定理が成り立つ．

定理 2

$h\ne 0$のとき，

$$\prod_Y(G)\ge h \Leftrightarrow \mu_G^*(h)\le \mathbf{d}'\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}'U^{-1}\mathbf{x}L^*(h)}$$

これより，P2 は次のように変換できる．

P3 :

Maximize h

subject to $x_1+x_2+\cdots+x_n \le R$

$\mathbf{w}'\mathbf{x} \le W$

$\mathbf{d}'\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}'U^{-1}\mathbf{x}L^*(h)}-\mu_G^*(h)\ge 0$

$\mathbf{x}\ge\mathbf{0},\ 0<h\le 1$

2.3 ファジィランダム作付計画モデル

各作物のファジィ数とした利益係数の中心が離散的な確率変動をするとし，中心が$\mathbf{d}_j=(d_{1j},d_{2j},\cdots,d_{nj})$となる確率を$p_j$とする．$\left(\sum_{j=1}^{m}p_j=1\right)$

このとき，可能性測度$\prod_Y(G)$に関して，$\prod_Y(G)\ge h$をある確率レベルP'以上で満たし，このhの最大化を目的とすると，問題は

P4 : Maximize h

subject to $x_1+x_2+\cdots+x_n \le R$

$\mathbf{w}'\mathbf{x} \le W$

$\mathrm{Pro}\left(\prod_Y(G)\ge h\right)\ge P'$

$\mathbf{x}\ge\mathbf{0},\ 0<h\le 1$

となる．ここで，$\mathbf{d}_j$は離散確率変数であるので，$\mathrm{Pro}\left(\prod_Y(G)\ge h\right)\ge P'$を満足するには，限られた$\mathbf{d}_j$の組合せで条件が成立すればよい．つまり，それらの組合せ集合をDとすれば，その要素$\mathbf{d}^{(k)}$（いくつかの$\mathbf{d}^{(k)}$の組；$i=1,2,\cdots,|D|$）に関する次の部分集合問題$P(\mathbf{d}^{(k)})$を用いてP4の最適解を求めることができる．すなわち，$P(\mathbf{d}^{(k)})$の最適解，最適値をそれぞれ$\mathbf{x}^{(k)*},h^{(k)*}$とすると，P4 の最適値は$\max_k h^{(k)*}$となり，対応する$\mathbf{x}^{(k)*}$が最適値となる．

$P(\mathbf{d}^{(k)})$:

Maximize h

subject to $x_1+x_2+\cdots+x_n \le R$

$\mathbf{w}'\mathbf{x} \le W$

$(\mathbf{d}_l)'\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}'U^{-1}\mathbf{x}L^*(h)}-\mu_G^*(h)\ge 0$

（$\mathbf{d}^{(k)}$の成分$\mathbf{d}_l$について）

$\mathbf{x}\ge\mathbf{0},\ 0<h\le 1$

ところで，$P(\mathbf{d}^{(k)})$は次のような問題に変換できる．

$P(\mathbf{d}^{(k)})$:

Maximize h

subject to $x_1+x_2+\cdots+x_n \le R$

$\mathbf{w}'\mathbf{x} \le W$

$(\mathbf{d}_l)'\mathbf{x}\ge T$

（$\mathbf{d}^{(k)}$の成分$\mathbf{d}_l$について）

$T+\sqrt{\mathbf{x}'U^{-1}\mathbf{x}L^*(h)}-\mu_G^*(h)\ge 0$

$\mathbf{x}\ge\mathbf{0},\ 0<h\le 1$

2.4 解法

ファジィ作付計画問題：P3 に関して，制約条件に含まれる関数の凸性など，関数の性質，問題の構造を十分に利用した効率的なアルゴリズムを提案し，今回報告する．さらに，P3 での解法を応用，発展させたファジィランダム問題での解法についても提案する．また，現在はより効率的な解法の開発を進めている．

References

[1] Hayashi, K. [2000] "Multicriteria analysis for agricultural resource management: A critical survey and future perspectives," European Journal of Operational Research, Vol.122, pp. 486−500. Itoh.

[2] 石井博昭, 坂和正敏, 岩本誠一 [2001]「ファジィOR」 朝倉書店.

[3] Itoh,T, Ishii,H. [2001] "Fuzzy Crop Planning Problem Based on Possibility Measure" Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2.

[4] 南石晃明 [1991]「不確実性と地域農業計画」 大明堂.