2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ファジィ論理関数と菅野積分の関係について

○　01306420　専修大学　高萩栄一郎　TAKAHAGI Eiichiro
関東学院大学　松下倫子　MATSUSHITA Michiko

1　はじめに

最近の研究により,（定数係数を持った）ファジィ論理関数 [1] と Choquet 積分, 菅野積分などのファジィ積分の間にさまざまな関係があることがわかってきている. 高萩ら [2] は, 単調な定数係数を持ったファジィ論理関数と菅野積分は, 相互に変換できることを示し, また, Marichal[3] は, 菅野積分と weighted max-min functions(単調な定数係数を持ったファジィ論理関数とほぼ同じもの) が同値であることを示し, その数学的な性質を議論している.

本稿では, 単調な定数係数を持ったファジィ論理関数のみならず, 一般の定数係数を持ったファジィ論理関数が（若干拡張した）菅野積分で表現できることを示す.

2　記号

2.1　定数係数を持ったファジィ論理関数

定数係数を持ったファジィ論理関数 [1] (以下 Fuzzy/C) f は, 論理変数 (本稿では入力変数, $x_1, x_2, \ldots, x_n$), と論理積 ($\wedge$)（省略することがある）, 論理和 ($\vee$), 否定 ($\neg$), 定数係数からなる. それぞれの使い方は, 一般的な Fuzzy/C([1] など) に従う. Fuzzy/C の例としては,

$$f(x_1, x_2) = (0.7x_1) \vee (0.3\neg x_1 x_2) \vee (0.6 \neg x_1 \neg x_2) \vee 0.1 \quad (1)$$

をあげる. 0.7 などは定数係数であり, 0.1 を定数項と呼ぶ. $\wedge$ に min, $\vee$ に max, $\neg x$ に $1-x$ 演算を行う.

2.2　単調性

Fuzzy/C f の単調性を次式で定義する.

$$x_i^1 \le x_i^2, \forall i \text{ ならば } f(x_1^1, \ldots, x_n^1) \le f(x_1^2, \ldots, x_n^2) \quad (2)$$

2.3　ファジィ測度, 菅野積分

$X = \{1, \ldots, n\}$ を入力変数の集合, ファジィ測度 μ を

$$\mu : 2^X \to [0,1] \quad (3)$$

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (4)$$

$$A \subseteq B \subseteq X \text{ ならば}, \mu(A) \le \mu(B) \quad (5)$$

で定義する. 式 (4) を「空集合の 0 制約」, 式 (5) を「ファジィ測度の単調性制約」と呼ぶ. 「空集合の 0 制約」は, 定義から外すこととがある.

菅野積分の定義は, $h(1), \ldots, h(n), h(i) \in [0,1]$ を入力変数として, 次式とする.

$$\text{(S)} \int h d\mu \equiv \max_{r \in [0,1]} \min[r, \mu(\{x; h(x) > r\})] \quad (6)$$

3　単調なファジィ論理関数と菅野積分

3.1　定数項なしの場合

f が単調な定数係数を持ったファジィ論理関数であり, 定数項を持たない場合, すなわち $f(0, \ldots, 0) = 0$ の場合, f は菅野積分で表現できる（証明略）. ファジィ測度 μ を

$$\begin{aligned} \mu(A) = f(x_1, \ldots, x_n) \ , \ \forall A \in 2^X \setminus \emptyset \quad (7) \\ x_i = 1 \text{ if } i \in A \\ x_i = 0 \text{ if } i \notin A \\ \mu(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

で割り当てれば, 次式のように一致する.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{(S)} \int h d\mu, h(i) = x_i, \forall i \quad (8)$$

3.2　数値例

数値例として,

$$f(x_1, x_2) = 0.2x_1 \vee 0.4x_2 \vee 0.8x_1x_2 \quad (9)$$

をあげる. この場合, $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 0.2, \mu(\{2\}) = 0.4, \mu(\{1,2\}) = 0.8$ というファジィ測度を割り当てれば, 菅野積分で表現できる.

3.3　論理式が加法標準形式の場合

論理式が数値例 (式 (9)) のように加法標準形式の場合, 簡易な方法でファジィ測度を求めることができる.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1,\ldots,m} (c_j \wedge (\bigwedge_{k \in A_j} x_k)) \quad (10)$$

(m は積項の数, c_j は j 番目の積項の定数係数,A_j は j 番目の積項の添字の集合）とすると,

$$\mu'(A_j) = c_j \ , \ j = 1, \ldots, m \quad (11)$$

$$\mu'(B) = 0 \ , \ \forall B \in (2^X \setminus \{A_1, \ldots, A_m\}) \quad (12)$$

とし,

$$\mu(A) = \max_{B \subseteq A} \mu'(B), \forall A \in 2^X \quad (13)$$

で割り当てる．例えば，$f(x_1, x_2) = 0.2x_1 \vee 0.3x_2$ の場合，$\mu(\{1\}) = \mu'(\{1\}) = 0.2$, $\mu(\{2\}) = \mu'(\{2\}) = 0.3$, $\mu'(\{1,2\}) = 0$, $\mu(\{1,2\}) = \max(\mu'(\{1\}), \mu'(\{2\}), \mu'(\{1,2\})) = 0.3$ となる．

3.4 菅野積分のファジィ論理関数表示

菅野積分を定数係数を持ったファジィ論理関数で表現するには，次のようにする．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{A \in \{A; A \subseteq 2^X\}} (\mu(A) \wedge (\bigwedge_{k \in A} x_k)) \quad (14)$$

3.5 定数項を持つ場合

定数項を持つ場合，すなわち $C = f(0, \ldots, 0) > 0$ の場合，式 (7) で求めたファジィ測度を使えば，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{S}) \int h d\mu \vee C, h(i) = x_i, \forall i \quad (15)$$

となる．定数項 C を菅野積分の内部に取り込むには，ファジィ測度と菅野積分を拡張しなくてはならない．すなわち，空集合の 0 制約を弛め，$\mu(\emptyset) = C$ とする．菅野積分の定義は，式 (6) をそのまま使う．その場合,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{S}) \int h d\mu, h(i) = x_i, \forall i \quad (16)$$

となる．したがって，任意の Fuzzy/C は，(拡張した) 菅野積分で表現できる．§3.3 や §3.4 の場合も同様である．

4 (非単調な) ファジィ論理関数と菅野積分

非単調なファジィ論理関数の場合，1 つの入力（論理変数）を真の入力，負の入力の 2 つに分けることにより，菅野積分で表現することができる．

まず，Fuzzy/C の否定 $\neg$ をすべて，論理変数に直接係るように，または，加法標準形式に変換する．

次に，$\neg$ が係らない論理変数 x_i を x_i^T に，$\neg$ が係る積項 $\neg x_i$ を x_i^F で置き直した Fuzzy/C を g とおく ($g : [0,1]^{2n} \to [0,1]$)．式 (1) の場合,

$$g(x_1^T, x_2^T, x_1^F, x_2^F) =$$
$$(0.7x_1^T) \vee (0.3x_1^F x_2^T) \vee (0.6x_1^F x_2^F) \vee 0.1 \quad (17)$$

となる．

g は，x_i^T と x_i^F を別々の変数と見れば，*1単調な Fuzzy/C である．したがって，この g を §3.5 の方法を使って，菅野積分を行えば，元の f の出力に一致する．

$X^* = \{1^T, \ldots, n^T, 1^F, \ldots, n^F\}$, $\mu^* : 2^{X^*} \to [0,1]$ とし,

$$\mu^*(A) = g(x_1^T, \ldots, x_n^T, x_1^F, \ldots, x_n^F), \forall A \in 2^{X^*} \quad (18)$$
$$x_i^T = 1 \text{ if } i^T \in A, \ x_i^F = 1 \text{ if } i^F \in A$$
$$x_i^T = 0 \text{ if } i^T \notin A, \ x_i^F = 0 \text{ if } i^F \notin A$$

で割り当れば,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{S}) \int h^* d\mu^* \quad (19)$$
$$h^*(i^T) = x_i, h^*(i^F) = 1 - x_i, \forall i$$

となる（証明略)．μ^* は，単調なファジィ測度である．

式 (1) の場合の μ^* の一部を示せば，式 (17) を使い，$\mu^*(\{1^T, 2^F\}) = g(1,0,0,1) = 0.7$, $\mu^*(\{1^F, 2^T, 2^F\}) = g(0,1,1,1) = 0.6$ となる．

5 おわりに

Fuzzy/C と菅野積分の関係を示した．式 (19) は，Fuzzy/C と同様に，相補律を満たさないなどの性質を持っている．

[4] では，Choquet 積分を使い，相補律を満たすような演算ができることを示した．そこで使われているファジィ測度は，式 (18) で定義されたファジィ測度に補正を加えたものになっている．

参考文献

[1] 荒木智行, 向殿政男: 定数係数をもったファジー論理関数について, 電子情報通信学会論文誌,D-I, Vol.J81-D-I NO.9, pp1037-1047,1998.

[2] TAKAHAGI,E and ARAKI,T: On fuzzy Integral representation in fuzzy switching functions with constants, Proc. VJFUZZY'98, pp.240-245,1998.

[3] J.-L. Marichal: On Sugeno integral as an aggregation function, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.114, 2000, pp.347-365.

[4] 高萩栄一郎: 論理型ファジィ積分, 第 17 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 日本ファジィ学会, 船橋,2001.

*1 g は，$x_i^T + x_i^F = 1$ という関係を無視して自由に入力値を設定できる．例えば，式 (17) で，$g(1, 0.1, 0.9, 0.8)$ のような入力も可能である．