行列長に依存した到着確率を持つ待ち行列における仕事終了確率最大化問題

01107945　鳥取大学工学部　*小柳　淳二　KOYANAGI Junji
01103205　鳥取大学工学部　河合　一　KAWAI　Hajime

1　はじめに

本研究では、２種類の仕事を一人で行う場合を考える。仕事 A(JA) は離散時間待ち行列システムで処理をされ、いったん、この仕事をするために待ち行列にはいったならば、仕事が終わるまで、他の仕事はできないものとする。仕事 B(JB) は、いくつかのステップからなり、各ステップには単位時間を要する。各ステップの終わりに、作業者は待ち行列を観測し、行列に加わるかどうかを判断する。ただし、JA が終了していない状態で、JB が終了したなら、JA のために待ち行列に加わらねばならない。すべての作業は制限時間内に終える必要があるものとし、作業者は制限時間内に両方の仕事を終える確率を最大にするように、待ち行列へ並ぶものとする。この問題を動的計画法で定式化し、最適政策の構造について調べる。

2　モデル

２種類の仕事 A(JA) と B(JB) を一人の作業者が処理する場合を考える。JA は離散時間待ち行列で処理されるもので、その待ち行列システムは各時点で確率 q で作業が終了し、行列長 i の時に確率 p_i で客の到着があるものとする（各時点では作業終了が先に判定される）。JB は L 単位時間必要な作業で、作業者が待ち行列に並んでいないときに処理される。JA と JB は制限時間 R のうちに終了させなければならず、そのために、各時点において、２つの仕事を終了させる確率を最大にするように、待ち行列長 i と JB の残りサービス時間をもとにして判断を下す。

まず

$$\sum_{k=i+1}^{R-L}\binom{R-L}{k}q^k\overline{q}^{R-L-k}. \tag{1}$$

を考える ($\overline{a}\equiv 1-a$)。この式は、サーバーが $R-L$ 時間以内に、 $i+1$ 以上の客をサービスする確率であり、状態 (i,L,R) でサーバーに加われば、この確率で成功することになる (ただし $R-L>i$)。

状態 (i,L,R) で JB を続けることを選択すると、$i>0$ では次の状態が確率 $\overline{p}_iq$ で $(i-1,L-1,R-1)$、確率 $p_iq+\overline{p}_i\overline{q}$ で $(i,L-1,R-1)$、確率 $p_i\overline{q}$ で $(i+1,L-1,R-1)$ となる。

状態 (i,l,r) として、待ち行列が i、JB の残り時間が l、制限時間まで r 残っている状態をとることができるが、JB を選択しつづける限り，$r-l$ は定数であるから、$S\equiv r-l$ とおいて (i,l,S) を（待ち行列に加わる前の）状態とする。待ち行列に入ることを選択すると (1) より成功確率が決定される。

3　定式化

状態 (i,l,S) に対して、以下の確率を考える。

$A(i,l,S)$ ：行列に入ったとき、成功する確率。

$B(i,l,S)$ ：JB を続け、その後最適に行動した場合に成功する確率

$V(i,l,S)$ ：最適に行動したとき成功する確率

これらの確率は以下の最適性方程式を満たす。

$$A(i,l,S) = \sum_{k=i+1}^{S}\binom{S}{k}q^k\overline{q}^{S-k}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} B(i,l,S) &= \overline{p}_iqV(i-1,l-1,S) \\ &\quad + (p_iq+\overline{p}_i\overline{q})V(i,l-1,S) \\ &\quad + p_i\overline{q}V(i+1,l-1,S), \end{aligned} \tag{3}$$

$$V(i,l,S) = \max\{A(i,l,S),B(i,l,S)\}. \tag{4}$$

以下の補題を i,l についての帰納法で示すことができる。

補題 1

(1) $V(i,l,S)\geq V(i+1,l,S)$、 これは成功確率が行列長 i に関して減少することを示す。

(2) $B(i,l,S)\leq B(i,l+1,S)$、これは JB の残り時間と制限時間が同時に増えたなら、成功確率が増えることを示す。

補題 1 の(2) と，$A(i,l,S)$ が l に関して定数であることから，l の増大にしたがって，最適な

アクションは「行列に加わる」から「加わらない」に多くとも一度変化するだけであることがわかる。

行列長 i の変化に対する最適アクションの変化を調べるために，状態 (i,l,S) で JB を継続し、次に待ち行列に加わったときに成功する確率 $C(i,l,S)$ を考える、定義より $B(i,1,S) = C(i,1,S)$ であり，一般の l に対して

$$\begin{aligned} C(i,l,S) &= \overline{p}_i q A(i-1,l-1,S) \\ &\quad + (p_i q + \overline{p}_i \overline{q}) A(i,l-1,S) \\ &\quad + p_i \overline{q} A(i+1,l-1,S) \end{aligned}$$

となる。

$C(i,l,S)$ に対して以下の補題を証明することができる。

補題 2 $C(i,l,S) \geq A(i,l,S)$ が $i+1 \geq p_i(S+1)$ のときに成立する。

最適政策の待ち行列長の変化に対する単調性（待ち行列長の増加に対して最適アクションがたかだか一度しか変化しない）を示すために以下の仮定をおく

条件 1 任意の i に対して $1 > (p_{i+1} - p_i)(S+1)$。

この条件は例えば，待ち行列人数が増えるほど到着確率が減少する（p_i が i に関して減少）場合には満たされる。

この条件と補題 2 をあわせると，ある i に対して $A(i,1,S) \leq C(i,1,S)$ ならば、$j \geq i$ に対しても $A(j,1,S) \leq C(j,1,S)$ が $V(i,1,S) = \max\{A(i,1,S), C(i,1,S)\}$ より成立する。

ここで $i_l = \max\{i | A(i,l,S) \geq B(i,l,S)\}$ と定義すると以下の定理を得る。

定理 1

(1) i_l は l に関して減少。

(2) $A(i,l,S) \geq B(i,l,S)$ が $i \leq i_l$ に対して成り立ち、かつ $i_l - i_{l+1} \leq 1$ である。

この定理は，最適アクションは l が増えるごとに，最適アクションの境界が 1 減少するかしないかの変化しかないことを示している。

計算により，次のような性質も導出することができる。

定理 2 $i_1 = I$ に対して，状態 $(I,2,S)$（l 方向にひとつ上）での最適アクションは

$$qp_I\left(1 - p_{I+1}\frac{S+1}{I+2}\right) > p_I\frac{S+1}{S-I} - \frac{I+1}{S-I} \quad (5)$$

が成立するとき,「行列に加わらない」となる。

4 数値例

最適政策を式 (2)-(4) により計算する。以下の表では、'A' は行列に加わるのがよいことを示し、'B' は JB を続けるのが良いことを示す。'0' は成功確率が 0 であることを示す。

(1) $p_i = 0.6, (i = 0,1,2), p_i = 0.5, (3 \leq i \leq 14)$, $q = 0.9$, $S = 6$ に対する最適政策。

l															
8	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0
7	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0
6	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0
5	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0
4	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0
3	A	A	A	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0
2	A	A	A	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0
1	A	A	A	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0
0	A	A	A	A	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 i

この場合最適政策は i の増加 l の増加に関して単調に変化する。

(2) $p_0 = 0.8$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.8$, $p_5 = 0.8$, $p_6 = 0.9$, $p_7 = 0.1$, $p_8 = 0.9$, $p_9 = 0.1$,
$p_{10} = 0.1$, $p_{11} = 0.9$, $p_{12} = 0.1$, $p_{13} = 0.1$, $p_{14} = 0.1$, $q = 0.9$, $S = 6$ に対する最適政策

l															
8	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0
7	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0
6	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0
5	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0
4	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0
3	A	B	B	B	A	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0
2	A	B	B	B	A	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0
1	A	B	A	B	A	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0
0	A	A	A	A	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 i

この場合 i に関しては最適政策が単調でないことがわかる。