2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

Semi-PH過程の構成法(1)

02103790　神奈川大学　*岸 康人　KISHI Yasuhito
01102990　神奈川大学　紀 一誠　KINO Issei

1　はじめに

近年相関をもつトラヒックの研究の重要性が高まってきている．Latouche[1] は, 確率変数列 $\{X_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$ がすべて同一の指数分布に従うが, 独立ではなく相関をもつようなセミマルコフ過程を考察し,これを semi-Poisson 過程と称した．

本稿では,このセミマルコフ過程を拡張し,任意のPH分布に従い,しかも独立ではなく相関性をもつ確率変数列 $\{X_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$ の構成法を提案する．

2　PH分布

目標とする周辺分布はPH型で与えられるとする．即ち, 状態 $\{1, 2, \ldots, T\}$ を一時的状態, 状態 $\{0\}$ を吸収状態とし, 初期状態分布が $\boldsymbol{a}$ で与えられるマルコフ過程の吸収時間 X が従う連続相型分布 $(\boldsymbol{a}, Q)$ を考える [2]. ただし, $a_0 = 0$ とする．この相型分布の Laplace-Stieltjes 変換 (LST) は

$$(1)\qquad E(e^{-\theta X}) = \boldsymbol{a}(\theta \boldsymbol{I} - Q)^{-1}\boldsymbol{q} = \frac{N(\theta)}{D(\theta)}$$

のように θ の有理関数で表される．ここでは $D(\theta)$ は

$$\begin{aligned} D(\theta) &= (\theta+\lambda_1)^{m_1}(\theta+\lambda_2)^{m_2}\cdots(\theta+\lambda_K)^{m_K} \\ &\quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_K) \end{aligned}$$

と表されるものとする．このとき $E(e^{-\theta X})$ は次のように部分分数に展開することができる．

$$(2)\qquad E(e^{-\theta X}) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{B(i,j)}{(\theta+\lambda_i)^{m_i-j+1}}.$$

ただし

$$B(i,j) = \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{d\theta^{j-1}}(\theta+\lambda_i)^{m_i}E(e^{-\theta X})\Big|_{\theta=-\lambda_i}.$$

3　セミマルコフ過程

周辺分布 (1) を実現する確率過程を構成するために,以下のようなセミマルコフ過程を考える．M をある自然数とし，$T + M = N$ であるような N について，状態空間 $I_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ 上の既約で非周期的なマルコフ連鎖の状態推移確率行列を $P = (p_{ij})$, 定常状態ベクトルを $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ とする．すなわち,

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$$

である．このとき状態空間 I_N 上のセミマルコフ過程 $\{S(t), t \geq 0\}$ を考える．$S(t)$ はある時点列 (確率変数)

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$$

においてのみその値を変化するものとする．即ち, $n \geq 1$ について, $\tau_{n-1} \leq t < \tau_n$ においては, $S(t) = S_n$ である．$X_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ とし，このセミマルコフ過程を支配するセミマルコフ核を

$$P(S_{n+1} = j, X_n \leq t | S_n = i) = p_{ij}G_i(t) \quad i, j \in I_N,$$

初期条件を

$$P(S_1 = i) = \pi_i, \quad i \in I_N$$

とする．ここで, $U_\ell > 0$ をある確率変数とし，その分布関数を

$$G_\ell(t) = P(U_\ell \leq t)$$

とする．このとき次が成り立つ．

Proposition 1
$n \geq 1$ について

$$(3)\qquad E(e^{-\theta X_n}) = \sum_{i=1}^{N}\pi_i E(e^{-\theta U_i}).$$

(3) より, $\{X_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$ は適当な確率変数 U_ℓ と定常状態ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ を適当に選ぶことにより, 共通の分布をもつように構成できる. 従って (3) の右辺が (1) と一致するような U_ℓ と $\boldsymbol{\pi}$ を定めることが課題となる.

確率変数 U_ℓ: $Z_i(i \in I_{K+M} = \{1, 2, \ldots, K, K+1, \ldots, K+M\})$ をパラメータ λ_i をもつ指数分布に従う確率変数とする. すなわち

$$(4) \qquad E(e^{-\theta Z_i}) \;=\; \frac{\lambda_i}{\theta + \lambda_i} \quad (i \in I_{K+M})$$

ただし

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad , \qquad \forall i, j \in I_{K+M}$$

とする. また, 確率変数 Z_i の n 個の和を $V_i(n)$ とし, $s(i-1) < \ell \leq s(i)$ ($s(i) = \sum_{h=1}^{i} m_h$, $i = 1, 2, \ldots, K$) となる ℓ について,

$$U_\ell = V_\ell(s(\ell) - \ell + 1) + \sum_{h=\ell+1}^{K} V_h(m_h) + \sum_{h=K+1}^{K+M} Z_h$$

を定めると, この LST $E(e^{-\theta U_\ell})$ は

$$E(e^{-\theta Z_\ell})^{s(\ell)-\ell+1} \prod_{k=\ell+1}^{K} E(e^{-\theta Z_k})^{m_k} \prod_{k=K+1}^{K+M} E(e^{-\theta Z_k})$$

となり, これを部分分数展開すると次の形となる.

$$\begin{aligned} E(e^{-\theta U_\ell}) \;=\; & \sum_{j=0}^{s(\ell)-\ell} \frac{\beta(\ell, \ell+j)}{(\theta + \lambda_\ell)^{s(\ell)-\ell+1-j}} \\ & + \sum_{k=\ell+1}^{K} \sum_{j=0}^{m_k - 1} \frac{\beta(\ell, s(k-1)+j)}{(\theta + \lambda_k)^{m_k - j}} \\ & + \sum_{k=K+1}^{K+M} \frac{\beta(\ell, s(K) + K - k))}{\theta + \lambda_k}. \end{aligned}$$

4 周辺分布と共分散関数

$N \times N$ 次の上三角行列

$$C = \big(\beta(i, j)\big) \quad i, j \in I_N$$

を定義する. ただし, $i > j$, $i, j \in I_N$ については, $\beta(i, j) = 0$ とする. また, $\gamma(\ell) = B(\ell, \ell - s(i-1))$ とし, N 次元ベクトル $\boldsymbol{g}$ を

$$\boldsymbol{g} = \big(\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(s(K)), \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{M}\big)$$

とすると次が成り立つ.

Proposition 2
定常状態ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が

$$(5) \qquad \boldsymbol{\pi} C = \boldsymbol{g}$$

を満たすならば, $n \geq 1$ について以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} (6) \qquad E(e^{-\theta X_n}) \;&=\; E(e^{-\theta X}) \\ (7) \qquad E(X_1 X_n) \;&=\; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \nu_i \nu_j p_{ij}^{(n-1)} \pi_i. \end{aligned}$$

ただし, U_ℓ の期待値を

$$\nu_\ell = E(U_\ell) = \int_0^{\infty} x dG_\ell(x) \quad \ell \in I_N,$$

マルコフ連鎖の n ステップ推移確率行列を,

$$P^n = \big(p_{ij}^{(n)}\big) \quad i, j \in I_N$$

とする. C は正則であるから, $\boldsymbol{g}$ が与えられれば (5) より $\boldsymbol{\pi}$ が定まり, (6) より周辺分布は目標とする PH 分布に一致する. このときの共分散関数は (7) で与えられる.

5 今後の課題

目標とする PH 分布を実現するためには (5) を満たす $\boldsymbol{\pi}$ を定常分布にもつような P を定めればよい. しかし, 与えられた共分散関数 (7) を同時に満たすような P の構成法は今後の課題として残される.

参考文献

[1] Latouche G., An Exponential Semi-Markov Process, with Applications to Queueing Theory, *Commun.Statist.-Stochastic Models*, **1**, 137-169, 1985.

[2] 牧本直樹,「待ち行列アルゴリズム–行列解析アプローチ–」朝倉書店, 2001.