2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

偶然による異常検出を考慮した秤の点検政策

01204194　流通科学大学情報学部　＊　三道　弘明　SANDOH Hiroaki
01007334　関西学院大学政策科学部　　井垣 伸子　IGAKI Nobuko
01400043　愛知工業大学経営情報科学部　　中川　覃夫　NAKAGAWA Toshio

1. はじめに

製品の最終重量を計量する工程において，秤に狂いが発生することが少なくなく，狂いの生じた秤で計量した製品に記載された重量は実際の重量と異なることとなる．このような秤の狂いは点検によって検出することが可能である．このような現状に対し，著者らはこれまで，秤の点検政策に関する数理モデルの構築を試みてきた[1]~[4]．しかし現実には，異常の発生した秤で計量作業を行っている際，偶然あるいは経験的に秤の異常を発見できることもある．本研究では，このように偶然による秤の異常検出を考慮した点検政策を提案する．

ここでは，点検は調整作業を含んでおり，点検終了時点で秤は正常に戻るものとする．また，偶然あるいは経験的に秤の異常を発見したときには，即座に調整を行い秤を正常に戻すこととし，計量の終了した製品は逐次出荷するものとする．この上で，ここでは調整によって秤が正常に戻った時点から計測して，時間 T が経過するか，あるいは発生した故障が偶然や経験によって検出された時点で点検・調整を行うという点検政策を考える．

2. 期待費用

前述したような方策を考えるとき，秤の点検・調整が完了した時点を再生点とする再生報酬過程が形成される．よって，単位時間当たりの期待費用は次式で与えられる．

$$C(T) = \frac{B(T)}{A(T)} \tag{1}$$

ここに

$$A(T) = \int_0^T \overline{F}(x)dx + \int_0^T F(T-y)\overline{G}(y)dy \tag{2}$$

$$B(T) = c_1 \int_0^T F(T-y)\overline{G}(y)dy + c_2 \tag{3}$$

ここに，確率変数 $X(>0)$ は故障発生時刻を，$Y(>0)$ は故障が発生してからそれが自然に発見されるまでの時間を表す．また，$F(x), G(y)$ は X, Y の分布関数を表し，$F(0) = G(0) = 0$ であるものとする．更に，c_1 は故障を放置したときの単位故障時間当たりに要する費用を，c_2 は1回当たりの点検・調整に必要な費用を表す．

以上の結果から

$$C(T) = c_1 - \frac{c_1 \int_0^T \overline{F}(x)dx - c_2}{\int_0^T \overline{F}(x)dx + \int_0^T F(T-y)\overline{G}(y)dy} \tag{4}$$

を得る．また

$$\lim_{T\to+0} C(T) = +\infty \tag{5}$$

$$\lim_{T\to+\infty} C(T) = \frac{c_1\mu_Y + c_2}{\mu_X + \mu_Y} \tag{6}$$

が成立する．但し

$$\mu_X = E[X] = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx \tag{7}$$

$$\mu_Y = E[Y] = \int_0^\infty \overline{G}(y)dy \tag{8}$$

であり，$\mu_X < +\infty, \mu_Y < \infty$ を仮定する．

3. 解析

$$C'(T) = \frac{A'(T)}{A^2(T)}\left[\frac{B'(T)}{A'(T)}A(T) - B(T)\right] \tag{9}$$

が成立するので

$$D(T) = \frac{B'(T)}{A'(T)}A(T) - B(T) \tag{10}$$

とおくと，$C'(T)$ の符号は $D(T)$ の符号に一致する．従って以下では，$D(T)$ の符号について調べる．

$$\lim_{T\to+0} D(T) = -c_2\ (<0) \tag{11}$$

$$\lim_{T\to+\infty} D(T) = \left[\frac{c_1}{1+\lim_{T\to+\infty} H(T)}\right](\mu_X + \mu_Y) - (c_1\mu_Y + c_2) \tag{12}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が成立する．ここに

$$H(T) \equiv \frac{\overline{F}(T)}{\int_0^T f(T-y)\overline{G}(y)dy} \tag{13}$$

であり，$H(T)$ は次式を満足する．

$$\lim_{T\to+0} H(T) = +\infty \tag{14}$$

次に $D(T)$ を T に関して微分すると

$$D'(T) = \left[\frac{B'(T)}{A'(T)}\right]' A(T) \tag{15}$$

より，$D'(T)$ の符号は $[B'(T)/A'(T)]'$ の符号に一致する．更に

$$\left[\frac{B'(T)}{A'(T)}\right]' = -\frac{c_1 H'(T)}{[1+H(T)]^2} \tag{16}$$

なる関係も成立するので，$\mathrm{sgn}\,[B'(T)/A'(T)]' = -\mathrm{sgn}\,[H'(T)]$ である．但し，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ は $\cdot$ の符号を意味する．

$H(T)$ については次の補助定理が成り立つ．

補助定理 1

F が *IFR(Increasing Failure Rate)* ならば，$H(T)$ は $T(>0)$ に関して単調減少関数である．

[証明]

$U = X + Y$ とおき，U の分布関数を $S(t)$ と書くこととする．さらに，$\overline{S}(t) = 1 - S(t)$ と書く．このとき

$$\overline{S}(T) = 1 - \int_0^T f(x)G(T-x)dx$$

である．ここで，F が IFR であることから，

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_0^T f(x)g(T-x)dx}{1-\int_0^T f(x)G(T-x)dx} \\
&\leq \frac{f(T)}{\overline{F}(T)} \frac{\int_0^T \overline{F}(x)g(T-x)dx}{\overline{S}(T)} \\
&= \frac{f(T)}{\overline{F}(T)} \frac{[\overline{S}(T) - \overline{G}(T)]}{\overline{S}(T)} \\
&< \frac{f(T)}{\overline{F}(T)}
\end{aligned}$$

が成立する．

一方，$H(T)$ を T について微分すると

$$H'(T) = \frac{\left\{\begin{array}{c} -f(T)\int_0^T f(T-y)\overline{G}(y)dy \\ +\overline{F}(T)\left[\int_0^T f(x)g(T-x)dx - f(T)\right] \end{array}\right\}}{\left[\int_0^T f(T-y)\overline{G}(y)dy\right]^2}$$

を得る．よって，$H'(T) < 0$ を得る．　(証明終わり)

以上の結果，次の定理が得られる．

定理 1

F が *IFR* であるとき，

(i) $\frac{c_1}{1+a}\mu_X - \frac{c_1 a}{1+a}\mu_Y - c_2 > 0$ ならば，$C(T)$ を最小にする有限の $T = T^*(>0)$ が唯一存在し

$$C(T^*) = \frac{c_1 \int_0^{T^*} f(x)\overline{G}(T^*-x)dx}{\overline{F}(T^*) + \int_0^{T^*} f(x)\overline{G}(T^*-x)dx} \tag{17}$$

(ii) $\frac{c_1}{1+a}\mu_X - \frac{c_1 a}{1+a}\mu_Y - c_2 \leq 0$ ならば，$T^* \to +\infty$，すなわち定期点検を行わないことが最適となり

$$C(T^*) = \frac{c_1\mu_Y + c_2}{\mu_X + \mu_Y} \tag{18}$$

である．但し

$$a = \lim_{T\to+\infty} H(T) \tag{19}$$

である．

[証明]

F が IFR であるとき $H(T) < 0$ であることから，式 (15),(16) より，$D'(T) >$ を得る．よって，式 (12) の $\lim_{T\to+\infty} D(T) > 0$ ならば，$T = T^*(>0)$ なる最適解が唯一存在する．しかし $\lim_{T\to+\infty} D(T) \leq 0$ ならば，$C(T)$ は単調減少となり，$T^* \to +\infty$ である．(証明終わり)

4. 数値例

紙数の関係上，数値例は当日報告させて頂く．

参考文献

[1] 三道弘明: 秤の最適点検政策に関する研究, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J83-A, No. 3, pp. 302-308 (2000).

[2] 井垣伸子，三道弘明：秤の最適点検頻度に関する研究，電子情報通信学会論文誌, Vol. J84-A, No. 6, pp. 827-833 (2001)

[3] H. Sandoh and N. Igaki : Inspection Policies for a Scale, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 220–231 (2001).

[4] H. Sandoh and N. Igaki : Optimal Inspections Policies for a Scale, *Computers and Mathematics with Applications*, (2002) (to appear).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．