2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

資源の投入に伴う拘束時間を考慮した機会目標に対する最適資源配分

01110110 防衛大学校 *小宮 享 KOMIYA Toru
01000890 防衛大学校 飯田耕司 IIDA Koji
01504810 防衛大学校 宝崎隆祐 HOHZAKI Ryusuke

1. 機会目標に対する最適資源配分問題と本研究の目的

一定期間内の任意の時点で手持ちの離散資源を任意に分割投資し，その期間で得られる利得を最大化する問題を考える。例としては，ハンターが狩猟を行っている状況や様々な投資機会等が考えられる。意思決定者には投資対象の出現時点は未知 (確率変数) であるが出現分布は既知とする。また出現する投資対象はその価値が即座に判断され，同時に投資の可否・投資資源量を判断しそれに従い行動する。この問題については様々な設定により多くの研究がなされている [1-3]。

従来のモデルでは，資源投入は費消時なしに即座に行われるとして扱われてきた。しかし，資源によっては投入に時間を要する場合も多い。本研究ではこうした資源を最適に投入する際の意思決定基準を求める。以下では一例として広域哨戒と局所捜索 (精査) からなる２段階捜索における精査ソノブイ投入計画問題を分析する。

2. ソノブイ投入計画問題のモデル化及び定式化

海上を哨戒する航空機が水中目標の捜索を行う際は，まず概略の探知情報 (コンタクト) を取得し，その後，コンタクトを得た局所領域で精査を行う。精査は音響ブイを海中に投下して実施する。ブイは哨戒中は再補充できず，また，ブイからの信号を解析し目標確認するには有限時間 t_0(以下、拘束時間という。) を要する。 コンタクトが発生すれば捜索者は即座にその情報が目標である信頼度 p を評価し精査に移る。コンタクトの発生分布 $f(p)$ は飛行前に既知とする。こうした状況で、投入するブイ数を以下の投入基準列 $\{C_j\}$ に従い決定する。

まず、哨戒機の状態を捜索終了時点までの残り時間 t 及び残りブイ数 n の組 (t,n) で定義する。時刻 t で発生した信頼度 p のコンタクトと，p の $[0,1]$ 区間を $n+1$ 個に分割するしきい値 $\{C_j\}$ とを比較し，$C_j \le p < C_{j+1}$ の時，j 本のブイを投入するものとする。以下では任意の (t,n) に関し，目標探知確率が最大となるように式 (1) で示されるしきい値列 $\{C_j\}$ を最適に決定する問題を考える。

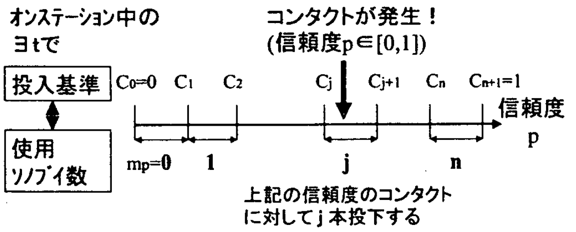

図 1: 信頼度 p のコンタクトに対する投入基準 $C_j(t,n)$ と使用ソノブイ数 m_p との関係

$$0 = C_0 \le C_1 \le C_2 \le \cdots \le C_n \le C_{n+1} = 1 \qquad (1)$$

コンタクト発生率を λ[回/時間] とする。状態 (t,n) で未コンタクトのとき，その時点以後最適なブイ投入計画による目標探知確率を $F(t,n)$ とする。また、コンタクト発生時、以後の最適投入計画 $\mathbf{C}^*$ による条件付目標探知確率を $G(t,n,\mathbf{C}^*)$ とする。$\mathbf{C}^* = \{C_j^*\}$ と略記する。微小時間 $[t,t+\Delta t]$ でのコンタクト生起の有無に注目した $F(t,n)$ の変化を考えると次式を得る。

$$\begin{aligned} F(t+\Delta t,n) & \\ &= (1-\lambda\Delta t)F(t,n)+\lambda\Delta t \max_{\mathbf{C}} G(t,n,\mathbf{C}) \\ &= (1-\lambda\Delta t)F(t,n)+\lambda\Delta t\, G(t,n,\mathbf{C}^*) \qquad (2) \end{aligned}$$

右辺第１項は，Δt 間にコンタクトを得ず以後最適に行動するときの目標探知確率，第２項は Δt 間でコンタクトを得た場合の目標探知確率を表す。第２項の $G(t,n,\mathbf{C}^*)$ は次式で書くことができる。

$$\begin{aligned} G(t,n,\mathbf{C}^*) = \sum_{j=0}^{n} \int_{C_j^*}^{C_{j+1}^*} f(p) \Big[p\{1-(1-\gamma)^j\} \\ +[1-p\{1-(1-\gamma)^j\}]F(t-t_0,n-j) \Big] dp \qquad (3) \end{aligned}$$

式 (3) で被積分関数の $f(p)$ に続く $[\cdots]$ 内の第１項は，投入した j 本の音響ブイ (探知率 γ をもつ各ブイによる探知は互いに独立と仮定する。) により目標探知に成功する確率を表す。第２項は j 本投下したにもかかわらず，探知に失敗し，拘束時間 t_0 だけ時間経過した後に広域哨戒に復帰し，さらに最適に捜索を続ける場合の探知確率を表す。この一定拘束時間のケースの他に，投下ブイ数 j に比例する時間 jt_0 を要する場合及び拘束時間が確率変数の場合も検討した。

3. 最適投入基準と計算アルゴリズム

式 (2) で示される目標探知確率 $F(t,n)$ がオペレーション中の任意の状態で最大となるためには、第２項に含まれる $G(t,n,\mathbf{C}^*)$ が逐次的に最適化されていることが必要である。

[最適性の条件 ($t > 2t_0$ のとき)]

$G(t,n,\mathbf{C}^*)$ を最適化するために式 (3) を C_j で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t,n,\mathbf{C}^*)}{\partial C_j} &= f(C_j)\Big[C_j\{1-(1-\gamma)^{j-1}\} \\ &\quad +\{1-C_j+C_j(1-\gamma)^{j-1}\}F(t-t_0,n-j+1)\Big] \\ &\quad - f(C_j)\Big[C_j\{1-(1-\gamma)^j\} \\ &\quad +\{1-C_j+C_j(1-r)^j\}F(t-t_0,n-j)\Big] \qquad (4) \end{aligned}$$

この値が 0 となるとき G は極大となる。 C_j^* に関し整理すると以下の最適条件を得る。

$$\frac{C_j^*(1-\gamma)^{j-1}\gamma}{1-C_j^*\{1-(1-\gamma)^{j-1}\}} = \frac{F(t-t_0,n-j+1)-F(t-t_0,n-j)}{1-F(t-t_0,n-j)} \quad (5)$$

式 (5) は投入した音響ブイのうち $(j-1)$ 本まで探知に失敗している時に「あと 1 本」の投入により得られる短期的な探知確率の期待増分と，j 本投入して失敗した時に最後の 1 本を節約することにより期待できる長期的な探知確率の増分とが釣り合うように C_j を決定すべきことを示している。条件付確率の形式で表現されている点が興味深い。$t_0 \le t \le 2t_0$ では $C_j^* = 0(;j=1,\cdots,n)$ となり、全ての残っているブイ n を投入して短期的な探知確率の最大化を図るべきである。一方 $0 \le t \le t_0$ では拘束時間が取れず、投入計画自体が作成できないため、$\mathbf{C}^*$ は定義されない。以上の考察と式 (2) より以下の微分方程式 (微小時間ごとの増分) が導かれる。

$$\frac{dF(t,n)}{dt} = \lambda\{G(t,n,\mathbf{C}^*) - F(t,n)\} \quad (6)$$

[アルゴリズム]

$G(t,n,\mathbf{C}^*)$ の数値積分及び式 (6) の微分方程式の値を解析的に求めることは困難であるので時間を離散的に扱い数値計算により解を求める。そのために式 (6) で示される増分と残り時間が $0(t=0, n$ は任意$)$ 及び残りブイ数が $0(n=0, t$ は任意$)$ の時の境界条件

$$F(0,\forall n)=0, \quad F(\forall t,0)=0,$$
$$G(0,\forall n,\mathbf{C}^*)=0, \ G(\forall t,0,\mathbf{C}^*)=0 \quad (7)$$

とを考慮して，時刻 $t=0$ から時間刻み幅 Δt で $t=T$ まで時間を増加させながら，オペレーション中の任意の状態 (t,n) での $F(t,n), \{C_j^*(t,n)\}$ を求めていく。それにより最適投入ブイ数 $\{m_p^*(t,n)\}$ が決定される。アルゴリズムは以下の 1 ～ 5 の各ステップで記述される。

1 初期搭載ブイ数 $N, T, \lambda, \gamma, \Delta t$ を設定する。
   $t:=0$, $n=0,1,\cdots,N$ に対し $F(t,n)=0$,
   $G(t,n,\mathbf{C})=0$ とおく。

2 $C_0^* \equiv 0, C_{N+1}^* \equiv 1$; $j=1,\cdots,N$ について最適性の条件より C_j^* を計算する。

3 $\{C_j^*\}$ を式 (3) に代入し $G(t,n,\mathbf{C}^*)$ を求める。

4 $G(t,n,\mathbf{C}^*)$ と $F(t,n)$ を式 (6) に代入し $F(t+\Delta t,n)$ を求める。(例えば Euler 法によるのであれば，$F(t+\Delta t,n) = F(t,n) + \frac{dF(t,n)}{dt}\Delta t$ とする。)

5 $t<T$ ならば $t:=t+\Delta t$ とおいて 2 に戻る。$t=T$ ならば $F(t,n), \{C_j^*(t,n)\}$ を出力し，計算終了

4. 数値実験

$N=20$[本]$,T=360$[分]$,\Delta t=1$[分]$,\lambda=4/360=0.0111$ [回/分]$,\gamma=0.1$ で数値実験を行った結果を図 2 に示す。図 2a,2b とも下から順に n(もしくは j) $=1,2,\cdots,19,20$ の曲線を表す。図 2b により例えば $t=300$ で $p=0.2$ のコンタクトが発生した際は，2 本のブイを投下するのが最適であることがわかる。

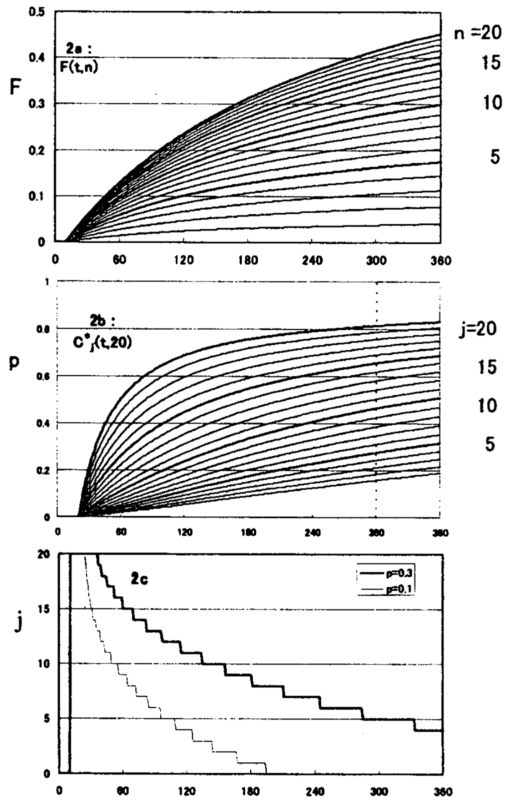

図 2: 目標探知確率 $F(t,n)(2a)$ 及び最適投入基準列 $C_j^*(t,20)(2b)$ 及び最初のコンタクト ($p=0.1$, 0.3) に対する最適投入ブイ数の時間変化 $(2c)$

5. まとめ

他の拘束時間パターンの場合も同様の結果が得られるが捜索終了間際では最適性の条件が若干異なる。詳細については数値実験の結果も含め当日発表する。

参考文献

[1] C. Derman,G.J. Lieberman and S.M. Ross: A Stochastic Sequential Allocation Model, *Operations Research*, Vol.23, (1975), 1120-1130.

[2] M.Sato: A Sequential Allocation Problem with Search Cost where the Shoot-Look-Shoot Policy is Employed, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.39, (1996), 435-454.

[3] M.Sato: A Stochastic Sequential Allocation Problem where the Resources can be Replenished, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40, (1997), 206-219.