複素一対比較の試み

02103770　日本大学生産工学部　† 鬼頭正浩
Nihon University　KITO Masahiro
01205220　日本大学生産工学部　篠原　正明
Nihon University　SHINOHARA Masaaki

1　はじめに

人間には感情の波があり、また各個人の価値観には差異がある。このような不確実性を盛り込んだ意思決定手法AHPの例として、確率的AHP、ファジーAHP、区間AHPなどがある。これらと同様に不確実性を扱う意思決定手法として、**複素一対比較**を提案する。

AHPで用いる一対比較行列の要素は通常実数を用いたものであるが不確実性を表現するものとしてこれに偏見度合いを表す虚数部を加えて、複素一対比較を考える。**パワー法**、**幾何平均法**を用いて、複素一対比較行列のウェイトベクトルを求めることを試みた。

2　一対比較行列の要素

通常の一対比較行列Aは、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{jk} & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

と表される。複素一対比較行列では要素 a_{jk} が極座標表示で $a_{jk} = r_{jk}e^{i\theta_{jk}}$ となる。ただし、i は虚数単位、この θ_{jk} は**偏見度合い**を表すことになる。また、$0 \le |\theta_{jk}| \le \frac{\pi}{2}$ とし、これ以外になるのは不自然であると仮定する。

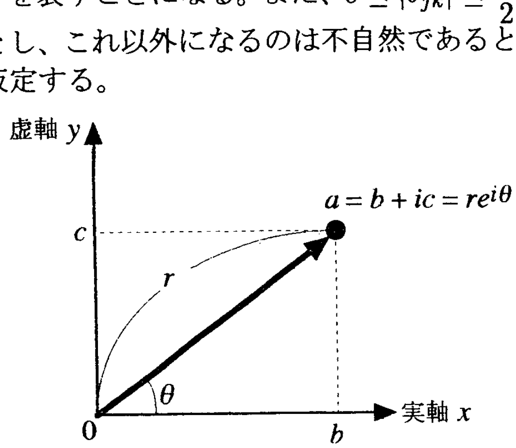

図 2.1　複素数-極座標変換図

3　複素一対比較パワー法

実数一対比較行列におけるパワー法と同様に一対比較行列 A をかけ合わせていき、固有ベクトルが収束するところでかけるのをやめる。ところで一対比較行列 A の要素 a_{jk} に複素数が含まれているのでそれを考慮した計算が必要になる。

まずは、A^2 についての計算を次のように表す。

$$(A^2)_{jk} = \left[\sum_{t=1}^{n}(r_{jt}e^{i\theta_{jt}} \cdot r_{tk}e^{i\theta_{tk}})\right] \tag{3.1}$$

以下、A^3、A^4、$\cdots$ と計算していく。それと同時に、A^p に対応してウェイトベクトル $\boldsymbol{w}$ を次式で求める。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \frac{A^p\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^T A^p \boldsymbol{e}} \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{w}$ が収束したと判定できるところで A をかけるのをやめ、その時 $\boldsymbol{w}$ をウェイトベクトルとして採用する。

4　複素一対比較幾何平均法

複素一対比較での幾何平均法によるウェイトベクトルの求め方も実数一対比較行列の取り扱いと同じで、ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}$ の第 j 要素 w_j を次式で計算する。

$$w_j = \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} r_{jk}e^{i\theta_{jk}}}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} r_{jk}e^{i\theta_{jk}}}} \tag{4.1}$$

5　3 次複素一対比較行列の例

複素一対比較行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3e^{i\frac{\pi}{18}} & 4e^{i\frac{\pi}{9}} \\ \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{18}} & 1 & 5e^{i\frac{\pi}{12}} \\ \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{9}} & \frac{1}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}} & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

5.1　パワー法の場合

式 (5.1) に**パワー法**を適用しウェイトベクトルを求めると、A^5 の時に収束し、次式を得る。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0.5997e^{i\cdot 0.081} \\ 0.3106e^{i\cdot(-0.065)} \\ 0.0965e^{i\cdot(-0.297)} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

5.2　幾何平均法の場合

式 (5.1) に**幾何平均法**を適用して A のウェイトベクトル$\boldsymbol{w}$を求めると、次のようになった。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0.5997e^{i\cdot 0.081} \\ 0.3106e^{i\cdot(-0.065)} \\ 0.0965e^{i\cdot(-0.297)} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

6　4 次複素一対比較行列の例

複素一対比較行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4e^{i\frac{\pi}{3}} & 6e^{i\frac{\pi}{4}} & 5e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}} & 1 & 3e^{i\frac{\pi}{7}} & 2e^{i\frac{\pi}{5}} \\ \frac{1}{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} & \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{7}} & 1 & 7e^{i\frac{3}{7}\pi} \\ \frac{1}{5}e^{-i\frac{\pi}{2}} & \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{5}} & \frac{1}{7}e^{-i\frac{3}{7}\pi} & 1 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

6.1　パワー法の場合

式 (6.1) に**パワー法**を適用すると、A^{10} の時にウェイトベクトルが収束し、次式を得る。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0.6406e^{i\cdot 0.328} \\ 0.2188e^{i\cdot(-0.355)} \\ 0.1831e^{i\cdot(-0.335)} \\ 0.0719e^{i\cdot(-1.354)} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

6.2　幾何平均法の場合

式 (6.1) に**幾何平均法**を適用して A のウェイトベクトル$\boldsymbol{w}$を求めると、次のようになった。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0.6823e^{i\cdot 0.368} \\ 0.2281e^{i\cdot(-0.475)} \\ 0.1628e^{i\cdot(-0.454)} \\ 0.0713e^{i\cdot(-1.369)} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

7　考察

式 (5.2) と式 (5.3) の値が一致したことから、3 次複素一対比較行列のウェイトベクトルはパワー法を用いて求める場合と幾何平均法を用いた場合は一致するということが言える。4 次一対比較行列のウェイトベクトルには、式 (6.2) と式 (6.3) を比べた場合、一致しているとは言い切れない。4 次実数行列のウェイトベクトルについても一致しないことがわかっているので、納得の値と言える。実数部の値が原因で、虚数部の値に影響が出ていると考えられる。

8　まとめ

複素一対比較パワー法の例題により、パワー法で複素行列の固有ベクトルを求めるのは困難ではないかといわれてきた複素一対比較行列の収束を確認した。パワー法で固有ベクトルを求めることができたのは、計算対象の複素一対比較行列が (reciprocal) だからであると考えられる。これはちょうど、逆比実数行列では実数固有値が保証されており、パワー法で固有値を求めることができたのと類似の性質と思われる。また一対比較行列が 3 次元の場合、複素一対比較パワー法と複素一対比較幾何平均法の例題において値がほぼ一致するのを確認した。これらにより、偏見度合いを見込んだ意思決定におけるウェイトベクトル推定が可能になると言える。

参考文献

[1] 篠原正明、松生拓倫、三宅千香子、留田慎一朗：「神経層、意思決定層、通信層の情報ネットワーク数理」日本大学生産工学部 第 33 回 学術講演会 数理部会 講演概要 (2000.12)

[2] Thomas L. Saaty : THE ANALYTIC NETWORK PROCESS, RWS Publications(2001)