

不完全一対比較情報下におけるウェイト推定法の性能比較

02602260	日本大学生産工学部 Nihon University	三宅 千香子 MIYAKE Chikako
02402030	日本大学生産工学部 Nihon University	中野 隼人 NAKANO Hayato
01404360	日本大学生産工学部 Nihon University	西澤 一友 NISHIZAWA Kazutomo
01205220	日本大学生産工学部 Nihon University	篠原 正明 SHINOHARA Masaaki

1 はじめに

一対比較デザイングラフが不完全グラフで与えられる場合の一対比較測定データ値集合から各項目のウェイトを推定するアルゴリズムとしては、対数最小二乗法 (LLS), 二段階法 (TS), Harker 法 (HK), 関谷法 (ST), 幾何平均法 (GM) などが提案されている。本文では、これに新たにパス代数法 (PA) を加えて、総計で6つのアルゴリズムの真値推定能力を統計的にシミュレーションに基づき比較評価する。

2 パス代数法の提案と関谷法との比較

項目 i を節点 i に、項目 i と j の間の一対比較を枝 (i, j) に対応させたデザイングラフ G を考える。枝 (i, j) には一対比較測定データ a_{ij} が付与される。一対比較測定データ行列を $A = a_{ij} (a_{ii} = 0)$ とする。 G が完全グラフの場合、 A の主固有ベクトル、すなわち、 $Ax = \lambda_{\max}x$ を満たす x を要素和が1になるように正規化し、項目ウェイトベクトルを推定している。グラフ理論 (パス代数) による解釈に従えば、主固有ベクトル x は式 (1) あるいは (2) で表現できる。

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} \quad (1)$$

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^N A^k e}{\sum_{k=0}^N e^T A^k e} \quad (2)$$

ここで、(1) 式の分子 $a(k) = A^k e$ の第 i 要素 $a_i(k)$ は、 $a_i(k) =$ 項目 i への k ステップ (steps or walks) 経由での全項目からの評価推移値総和、さらに、(2) 式の分子 $b(k) = \sum A^k e$ の第 i 要素 $b_i(k)$ は、 $b_i =$ 項目 i への、全ステップにおよぶ、全項目からの評価推移値総和、を表

現している。(但し、 $A = \{a_{ij}\}$ の一対比較測定値 a_{ij} には項目 j から項目 i への評価値の意味を持っており、随伴パス代数の解釈を行っている。) 以上で完全デザイングラフでのウェイト推定に、主固有ベクトルを採用するグラフ理論 (パス代数) にもとづく解釈、意味付けを述べたが、この解釈は不完全グラフの場合にも成立すると考え、不完全デザイングラフにおいても、(一対比較を行わない) 枝が存在しない部分に対応する $a_{ij} = 0$ とし、その他の (一対比較を行う) 枝が存在する部分については a_{ij} をそのまま用いた一対比較測定データ行列 A の主固有ベクトルを求める方法を提案し、これをパス代数法 (PA) と呼ぶ。関谷法 (ST) では、行ごとに非零非対角成分数で a_{ij} 値を除しているが、パス代数法 (PA) では元の a_{ij} 値をそのまま採用している点のみが異なる。関谷法では、項目 i からの出力枝 (随伴行列を考えているので、評価の流れでは入力フロー) の数で a_{ij} 値を除すことによりステップ毎の一種の正規化が達成されており、その意味で適正である (図1)。一方、パス代数法では、例えば②への③と④からの一対比較情報 (評価の流れでは、②からみた③と④) の評価値は、各々 $\frac{1}{2}$ あるいは $\frac{1}{3}$ ではなく、皆同等と考えている (図2)。

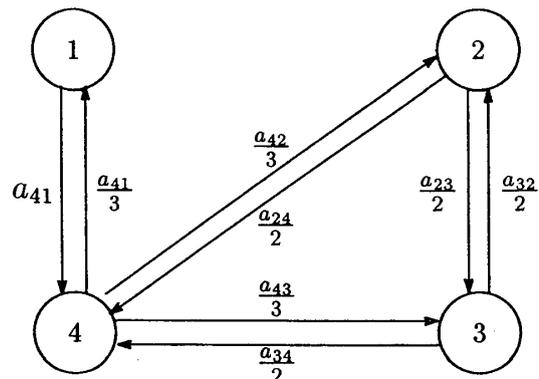


図1: 関谷法による枝毎の評価値重み (式 (3) の A)

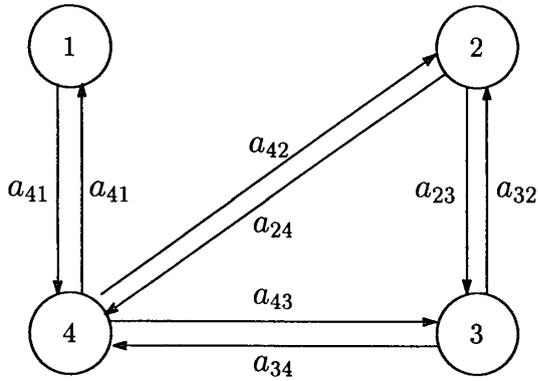


図 2: パス代数法による枝毎の評価値重み (式 (3) の A)

3 シミュレーションによる性能比較

不完全な一対比較測定行列 A として, (3) 式のパターンを考える.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \square & \square & a_{14} \\ \square & 1 & a_{23} & a_{24} \\ \square & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

真値推定ウェイト w^0 を仮定し, 対応する整合行列 W を生成し, $W = \{w_{ij}\}$ の各要素に加法形誤差, 乗法形誤差を加えたものを測定行列サンプル $A(l) (l = 1, \dots, m)$ とする.

これは, w^0 より一対比較測定値が生成されるだろう最も単純なプロセスをシミュレートするものであり, より一般的な誤差発生過程^[1]の一部分である. 各 $A(l)$ に 5 つの推定アルゴリズム (HK を $i = 1$, TS を $i = 2$, PA を $i = 3$, ST を $i = 4$, GM を $i = 5$, LLS を $i = 6$) を適用して得られた推定ベクトルを $w^i (i = 1, \dots, 6)$ と表記する. w^0 と w^i の間のユークリッド距離をサンプル数 m で平均化した結果 d_{ij} を表 1, 表 2 に示す.

表 1: 乗法形誤差

—	$n = 4$
$\overline{d_{01}}$	0.028506
$\overline{d_{02}}$	1.008208
$\overline{d_{03}}$	0.077894
$\overline{d_{04}}$	0.028511
$\overline{d_{05}}$	0.075117
$\overline{d_{06}}$	0.035504

表 2: 加法形誤差

—	$n = 4$
$\overline{d_{01}}$	0.470971
$\overline{d_{02}}$	1.203475
$\overline{d_{03}}$	0.420284
$\overline{d_{04}}$	0.475313
$\overline{d_{05}}$	0.436201
$\overline{d_{06}}$	0.766763

4 おわりに

加法形誤差の下では, 新提案のパス代数法の真値推定能力が統計的に高いことが判明した. 一般的誤差過程での性能比較, 算術平均法, 列要素数正規化法など新しいウェイトベクトル推定法の提案など不完全情報 AHP に関する諸問題が今後の研究課題である.

参考文献

- [1] 三宅千香子, 篠原正明, 「誤差発生メカニズムを考慮したウェイト推定法の優劣比較」, 『2001 年度日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集』, pp48-49.
- [2] 篠原 正明, セミナール資料第 15 章「パス代数」(1997).
- [3] 木下栄蔵, 「AHP の理論と実際」, 日科技連