2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ウェイト推定法には算術平均法！

02602260 日本大学生産工学部 † 三宅 千香子
Nihon University MIYAKE Chikako
01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University SHINOHARA Masaaki

1 はじめに

一対比較行列の測定値 a_{ij} は, 項目 i の (未知の) 真値ウェイトを w_i とするならば, 測定誤差 e_{ij} を適当に定義することにより一般に $a_{ij} = f(w_i, w_j, e_{ij})$ と表現できる. 比率モデルを採用し, かつ, 加法形誤差を仮定すれば, $a_{ij} = (w_i/w_j) + e_{ij}$, 乗法形誤差を仮定すれば, $a_{ij} = (w_i/w_j)e_{ij}$ と表現できる. シミュレーション実験により, 加法形誤差の場合にはエントロピー法 (ENT) の, 乗法形誤差の場合には固有ベクトル法 (EV), 幾何平均法 (GM) の真値ウェイト推定能力が統計的な意味で相対的に高いことが判明している. [1], [2]

本研究では, これまでのシミュレーション実験に算術平均法 (AM) を新たに加えて再実験したところ, 算術平均法 (AM) が加法形誤差の場合でも, 乗法形誤差の場合でも, 真値に統計的に最接近なウェイトベクトルの推定能力を持つことが判明したので報告する.

2 評価対象とするウェイト推定

1. 固有ベクトル法 (EV)
   一対比較測定行列 A の右固有ベクトル ($Aw = \lambda w$)

2. 幾何平均法 (GM)
   一対比較測定行列 A の行毎の幾何平均値の正規化

3. エントロピー法 (ENT) [1] 参照

4. 調和平均法 (HM)
   一対比較測定行列 A の行毎の調和平均値の正規化

5. 算術平均 (AM)
   一対比較測定行列 A の行毎の算術平均値の正規化

3 誤差発生メカニズム

真値ウェイトベクトル w の存在を仮定し, w とは異なるウェイトベクトルを推定してしまう元となる一対比較行列測定値 A が生成されるだろうプロセスの一例を図1に示す。真値 w が心の動揺などの理由により, v に変容し, v に基づく整合行列 $V = \{v_{ij}\}$ が生成され, V がさらに心の動揺などの理由により $U = \{u_{ij}\}$ に変形してしまい, u_{ij} 値が適当な離散値 $A = \{a_{ij}\}$ に固定されるという一般的なメカニズムである.

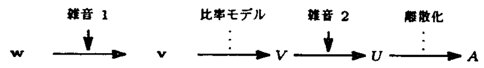

図 1: 一般的な誤差発生メカニズム

雑音 1 :	真値ウェイトベクトル w に加わる雑音 e
雑音 2 :	整合行列 V の各要素に加わる雑音 E
離散化 :	比較行列 U の各要素を離散化することにより離散化誤差 (量子化誤差) が生じる
w :	真値ウェイトベクトル
v :	真値ウェイトベクトルに対する摂動後ウェイトベクトル ($v = f(w, e)$)
V :	v に対応する整合一対比較行列 ($v_{ij} = v_i/v_j$)
U :	V に対する摂動後一対比較行列 ($U = F(V, E)$)
A :	U の各要素を判定尺度スケールに基づき離散化した測定一対比較行列

4 シミュレーション実験

真値ウェイト w^0 は, (0, 10] の実数一様乱数で与え, 正規化した後降順に並びかえたものを真値ウェイト w^0 とする. それに対して人間の心の動揺を想定した図1の一般的な誤差発生プ

ロセスに従って, 誤差を加えるシミュレーション実験を行う. 雑音 2 の付加後の連続値一対比較行列 U に対する推定ウェイトベクトルを u^k で, 離散化一対比較行列 A に対する推定ウェイトベクトルを w^k で表記する (k=1(GM), 2(EV), 3(ENT), 4(HM), 5(AM)). U ならびに A の多くの標本集合に対して, 5 つのウェイト推定法を適用し, 真値との近接度合をユークリッド距離により, さらに, ランキング逆転頻度も評価する (実験手順の詳細は [2] を参照).

5 シミュレーション結果

雑音 1 は何も付加せず, 雑音 2 として (平均 0, 分散 σ_0^2) の対数正規分布を付加し, 標本数 m=10000, 真値ウェイトベクトル w^0 と $w^k(k=1\cdots5)$, ならびに w^0 と $u^k(k=1\cdots5)$ の間の平均距離を表 1～表 6 に示す.

6 おわりに

一般的誤差発生メカニズムの下でシミュレーション実験を行い, 算術平均法の真値ウェイト推定能力が高いことを統計的に示した. さらに,「統計的」のみならず, 個々のサンプル毎にも高い推定能力を持つことも判明した. 従前からも, 算術平均法をウェイト推定に使用してみてはという指摘は, 無い訳ではなかったが, 他との一対比較値が全て 1 以上でも推定ウェイト値が最大にならない「ウェイト順位逆転」が生じるなどの, 根拠の浅さにより本格的には取り上げられなかった. 本シミュレーション実験による統計的真値推定能力の考え方は, 現実感覚のウェイト推定の良さを反映していると思われるので, 算術平均をウェイト推定法に用いる道が開かれたのではと思う.

参考文献

[1] SHINOHARA.M, MIYAKE.C and OHSAWA.K,「WHY NOT USE THE ENTROPY METHOD?」, The 6th International Symposium on The Analytic Hierarchy Process (ISAHP'01.), 431-434.

[2] 三宅千香子, 篠原正明,「誤差発生メカニズムを考慮したウェイト推定法の優劣比較」,『2001 年度日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集』, pp48-49.

表 1: 乗法形誤差 (0, 0.1)(離散化前)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.043848	0.026824	0.019263
$\overline{d_{02}}$	0.043872	0.026983	0.019402
$\overline{d_{03}}$	0.080199	0.028029	0.021441
$\overline{d_{04}}$	0.054412	0.029000	0.021498
$\overline{d_{05}}$	0.001343	0.000589	0.000431

表 2: 乗法形誤差 (0, 0.1)(離散化後)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.054436	0.034165	0.023886
$\overline{d_{02}}$	0.054358	0.034033	0.023902
$\overline{d_{03}}$	0.079559	0.034049	0.024351
$\overline{d_{04}}$	0.080376	0.037883	0.027087
$\overline{d_{05}}$	0.002317	0.004078	0.002255

表 3: 乗法形誤差 (0, 0.3)(離散化前)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.127586	0.080796	0.057772
$\overline{d_{02}}$	0.129172	0.084906	0.061932
$\overline{d_{03}}$	0.222820	0.096518	0.075116
$\overline{d_{04}}$	0.157434	0.092094	0.068561
$\overline{d_{05}}$	0.005283	0.003374	0.002472

表 4: 乗法形誤差 (0, 0.3)(離散化後)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.126236	0.077413	0.055890
$\overline{d_{02}}$	0.127541	0.082804	0.061008
$\overline{d_{03}}$	0.223336	0.094669	0.074725
$\overline{d_{04}}$	0.153291	0.088224	0.066420
$\overline{d_{05}}$	0.005460	0.007093	0.003923

表 5: 加法形誤差 (0, 0.1)(離散化前)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.007924	0.007743	0.005309
$\overline{d_{02}}$	0.007926	0.007750	0.005314
$\overline{d_{03}}$	0.000727	0.007023	0.004346
$\overline{d_{04}}$	0.012632	0.009108	0.006724
$\overline{d_{05}}$	0.000008	0.000320	0.000192

表 6: 加法形誤差 (0, 0.1)(離散化後)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.019950	0.025165	0.016480
$\overline{d_{02}}$	0.019851	0.025557	0.016822
$\overline{d_{03}}$	0.002219	0.021264	0.013822
$\overline{d_{04}}$	0.044747	0.030962	0.019894
$\overline{d_{05}}$	0.000738	0.011165	0.008593