

## 人口動態の微分方程式モデル

02401920 慶應義塾大学 \*中桐裕子 NAKAGIRI Yuko  
01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu

## 1. はじめに

人口は、出生数と死亡数との差し引きでその値が決定されるものである。

人口の変動を記述する為のモデルとして、マルサス法則やロジスティック法則に基づいた成長曲線がまず挙げられるであろうが、ここでは（出生と死亡という現象をまとめた）人口の増加率だけに着目してモデルが生成されている。

これに対して、詳細な人口推計の為に広く用いられる手法であるコーホート分析法においては、男女・年齢階層（コーホート）別に出生数と死亡数が追跡される。非常に精度の高い推定値が得られるが、各層の出生率や死亡率など、多くのデータが必要となる[1]。

この研究は、コーホート法にヒントを得て、出生と死亡という現象を明示的に組み込んだ、比較的構造が単純な微分方程式モデルを提案するものである。ここでは実データの再現性を確認したうえで、出生率や死亡率をさまざまに設定した下での人口動態について考察を行い、得られた結果と従来モデルとを比較する。

## 2. 人口動態のモデル化

時刻 $t$ における年齢別の人口を次のように表す：

- $y_1(t)$  : 年少人口 (0~14歳),
- $y_2(t)$  : 生産年齢人口 (15~64歳),
- $y_3(t)$  : 老年人口 (65~歳),
- $y_4(t)$  : 時刻 $t$ までに死亡した人数.

このときの人口は、 $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ で計算される事は明らかであろう。

図1のように、ある時点で生を受けた各人は年を経るにつれて年少層→生産年齢層→老年層へと移動する。但し各層では一定の割合で死亡し、また出生数は生産年齢層の人口に比例すると仮定すると、人口動態は次のような微分方程式で書き表わすことができよう：

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = b_1 y_2(t) - b_2 y_1(t) - b_4^* y_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = b_2 y_1(t) - b_3 y_2(t) - b_4^* y_2(t), \quad (2)$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = b_3 y_2(t) - b_4^{**} y_3(t), \quad (3)$$

$$\frac{dy_4(t)}{dt} = b_4^* y_1(t) + b_4^* y_2(t) + b_4^{**} y_3(t). \quad (4)$$

各パラメータは次のような割合を指す：

- $b_1$  : 生産年齢人口に対する単位時間出生率,
- $b_2$  : 年少層の中で、単位時間に生産年齢層へ移動する人の割合,
- $b_3$  : 生産年齢層の中で、単位時間に老年層へ移動する人の割合,
- $b_4^*$  : 65歳未満の人の単位時間内死亡率,
- $b_4^{**}$  : 65歳以上の人の単位時間内死亡率.

このモデルをコーホート法と比較すると、コーホートの数を（最小限の）3に減らして、それぞれのコーホートでの生存率、死亡率が共通であるとした点で、状態がかなり単純化されていることが分かる。

微分方程式(1)~(4)は解析的に解くことが出来ないで、プログラムによって得た数値解を利用して分析を行う。また後の節ではモデルをより現状に近づける為に、出生率 $b_1$ や死亡率 $b_4^*$ ,  $b_4^{**}$ が時間と共に直線的に変化するとして解を算出する。

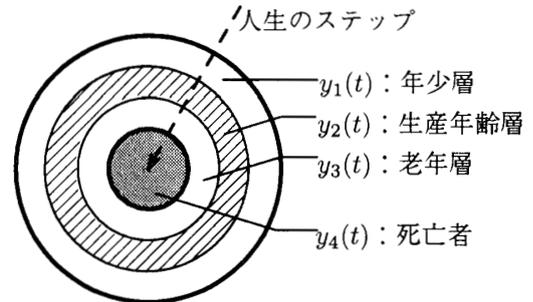


図1 人口モデルの概念図.

## 3. 我が国の人口動態の再現

作成したモデルを用いて、戦後の我が国の人口動態再現を試みる。

出生率 $b_1$ や死亡率 $b_4^*$ ,  $b_4^{**}$ は、出生率低下や医療の進歩による死亡率の低下の傾向を反映させる為に、実際の年間データ ([2],[3]) から直線回帰をした式で与えた。年少層から生産年齢層に移動する人の割合 $b_2$ は、単位時間を1年間としているので、年少人口のうち14歳人口の占める割合となる。ここでは年少層の年齢別人口が均一であるとして、 $b_2 = 1/15$ とした。

生産年齢層に関しては、年齢が上がると死亡率が大きくなることを考慮して、 $b_3 = 1/100$ とした。この値の設定方法には改善の余地があると思われる。図2、図3に、1945年における層別人口を初期値として得られた人口の推定値を、実データと共に示す。

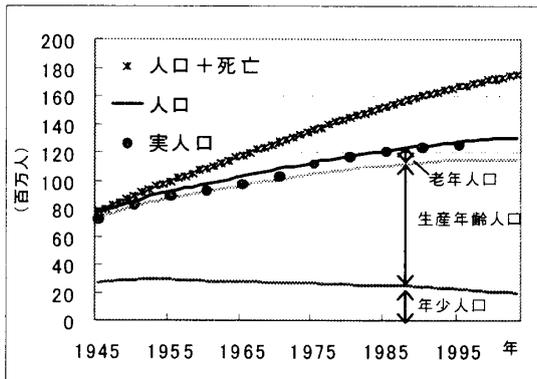


図2 日本戦後人口の推定.

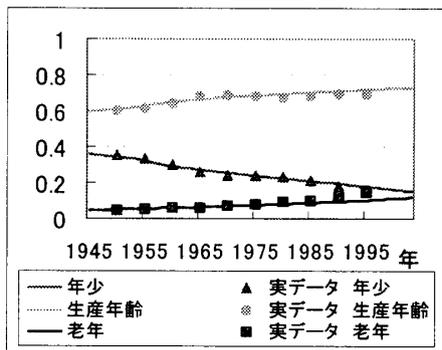


図3 日本戦後人口割合の推定.

実際の人口変動をうまく記述できていることが分かる。実際のデータとモデルによる推定値との相対誤差は、高々6パーセントほどであった。

図2から、終戦から今日までの間に、わが国ではおよそ1億7千万の人が住み暮らしたことが示唆される(現在の人口を約1億3千万人とすると、戦後4千万人前後が亡くなったということになる)。出生数と死亡数との差し引きの結果として実現されている人口だけではなく、このような累積値にも、本モデルのような簡単な枠組みによって目を向けることができる。

#### 4. 人口動態シナリオと既存成長曲線の当てはめ

出生率、死亡率の変化について特定のシナリオを与え、本モデルによって人口変動の様子を追う。

##### 4.1 パターン1

図4右のように、出生率が大幅に下がり、老年層の死亡率が年々上がっていくような状況を想定して人口を推定した。人口は緩やかに増加して、成長速度が小さくなった後に減少する。人口が増加している時点の値に、人口成長曲線として頻りに用いられるロジスティック曲線：

$$y(t) = \frac{1}{C \exp(-bt) + \frac{1}{S}} \quad (5)$$

を当てはめてみると、非常に良く当てはまることが分かる(図4)。

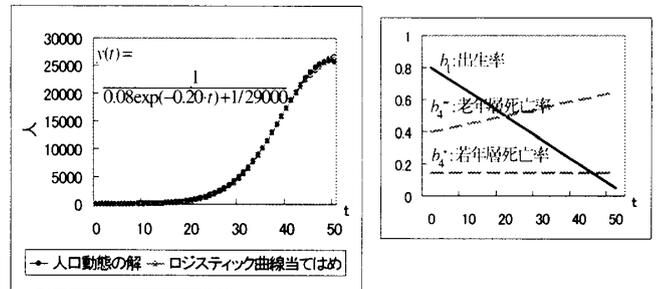


図4 人口動態とロジスティック曲線の当てはめ、およびパラメータの設定.

#### 4.2 パターン2

図5右のように、出生率、老年層の死亡率が共に減少していく状況を想定して、人口を推定した。この場合人口の成長速度は徐々に増して、人口は無限大に発散する。マルサス法則に基づいて生成される指数曲線：

$$y(t) = C \exp(bt) \quad (6)$$

をこのように当てはめると、よく適合した(図5)。

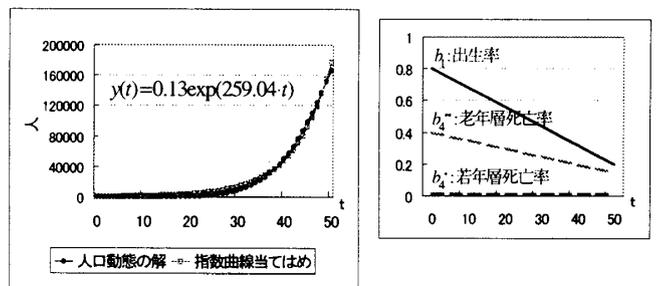


図5 人口動態と指数曲線の当てはめ、およびパラメータの設定.

従来提案されていたロジスティック曲線や指数曲線と同等の曲線が、このモデルにおいて出生率と死亡率をさまざまに変化させるといふ、一つの同じ枠組みの中から生成されることが確かめられた。

#### 5. 今後の課題

出生率や死亡率の変動が人口に与える影響について、さらに詳しい分析ができる。また、本モデルの発想を他の社会現象に応用することができよう。例えば何らかの商品を購入・使用の後に廃棄する過程を考えると、「ある時点で商品を実際に使用している層」と、「商品を購入したがすでに廃棄してしまった層(つまり累積売上)」を共に取り扱うことで、何らかの示唆を得ることができるかもしれない。

#### 6. 参考

- [1] 山口喜一(1989): 人口分析入門, 古今書院.
- [2] 総務庁統計局(2000): 平成7年国勢調査最終報告書 日本的人口(解説編), 日本統計協会.
- [3] 総務省統計局ホームページ.