

## 待ち行列を伴う都市施設の数を決めるための数理モデル

01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu  
慶應義塾大学 \*吉岡 昌一 YOSHIOKA Shoichi

1. はじめに

都市内に複数の公共的な施設を設けるとき、その数はどの程度にすればよいのだろうか。施設が少ない程建設・運営費は低廉ですむ。この観点からすると、施設数は少ない程よい。しかし住民は空間的に分散して住んでいるから距離を克服せねば施設を訪れることができない。移動費用の観点からすると、施設は遍く存在していることが望ましい。さらに、住民が施設でサービスを受ける為には待ち時間を負担しなければならない場合も多い。都市全体での窓口数が一定のもとでは、1施設当たりの窓口数は多い程平均待ち時間は小さくなる(複数窓口の効用)ので施設数は少ない程よい。公共的な施設の場合、施設建設・運営費も交通費もともに住民が負担することになり(前者は税負担、後者は移動費用負担)、施設を増やす程便利になるが同時に建設・運営費も増加する。[1]はこのトレード・オフに基づいて適正な施設数を決めるモデルを提案している。本研究では住民が負担する待ち時間費用も考慮したモデルを提案する。

2. 定式化

対象都市の面積を  $S$ 、人口を  $P$  とする。そして

・都市内で人口が一様に分布する

と想定する。この都市に同一種の施設を  $n$  個設け、その誘致圏を”区”と呼ぶ。現実の施設とその誘致圏を見ると、1つ1つの区の大きさや人口に大きな差異がない場合も多いので

・区の人口(施設利用者数)は一律に  $P/n$

・区の面積も一律に  $S/n$

の両者が成り立つものとする。さらに次を定義する。

$v$ =(住民1人が1年に施設を利用する回数の平均値)

$u$ =(1施設に1年に到来する延べ利用者数)= $vP/n$

2.1 施設建設・運営費

1つの施設の年当たり建設・運営費として、

$$p(u) = a + bu^c \quad (a, b \geq 0; 0 < c \leq 1). \quad (1)$$

を考える。(i)  $b=0$  のとき  $p(u)$  は定数費用;

(ii)  $b > 0$  かつ  $c=1$  のとき  $p(u)$  は線形費用;(iii)

$b > 0$  かつ  $0 < c < 1$  のとき  $p(u)$  は利用者の規模の効果を反映した費用となる。都市全体での建設・運営費を  $f(n)$  とおくと、 $p(u)$  を  $n$  倍して求められる。

$$f(n) = np(u) \quad (2)$$

2.2 住民の交通費

住民は住所から最寄の施設を利用するものとするれば、住所から施設への平均距離は

$$\bar{r}(n) = \kappa \sqrt{S/n} \quad (3)$$

と表せる。ここで  $\kappa$  は(イ)距離の定義、(ロ)区の形状、(ハ)施設位置に依存する定数である。

続いて次を定義する。

$$\alpha = (\text{単位移動費}) [\text{円/km}] \quad (4)$$

都市全体での往復の交通費を  $g(n)$  とおく。

$$g(n) = 2r(n)vP\alpha \quad (5)$$

2.3 住民の待ち時間費

サービス窓口の総数が都市全体で  $K$  個あるものとし、 $K$  は所与とする。住民の到着間隔と窓口のサービス時間はそれぞれ平均  $1/\lambda$  [年]、 $1/\mu$  [年]の指数分布に従うとし、待合室に制限がないとする。1施設当たりの窓口数は  $K/n$  より、 $M/M/(K/n)(\infty)$  を  $n$  個配置する問題に帰着する。 $M/M/s(\infty)$  モデルの平均待ち時間  $W_q$  の  $\lambda$  に  $u$  を代入し、 $s$  に  $K/n$  を代入すると、本モデルでの住民の平均待ち時間  $W(u)$  が求まる。さらに次を定義する。

$$\beta = (\text{単位待ち時間費}) [\text{円/年}] \quad (6)$$

都市全体での待ち時間費を  $h(n)$  とおく。

$$h(n) = vPW(u)\beta \quad (7)$$

### 3. 総費用の最小化問題

都市住民の総費用負担  $T(n)$  は施設の建設・運営費と交通費と待ち時間費を合計して求められる。

$$T(n) = f(n) + g(n) + h(n) \quad (8)$$

以下では最適化問題

$$\text{minimize } T(n) \quad (9)$$

$$\text{subject to } 0 \leq n \leq K$$

の解を追求する。 $n$  は本来自然数であるが本研究では構造を巨視的に記述したいので便宜上これを連続変数として扱う。なお、待ち行列の平衡条件より前提として  $0 \leq vP/K\mu < 1$  が満たされているものとする。

### 4. 数値例と考察

パラメータとして表 1 の値を用いる。

表 1

$S$	$K$	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\mu$	$v$
1	100	1	1	1	1	1	1/2	100	1

$P$  のとり得る範囲は平衡条件より  $0 \leq P < 10000$ 。

最適施設数  $n^*$  の総人口  $P$  による変化を調べる。

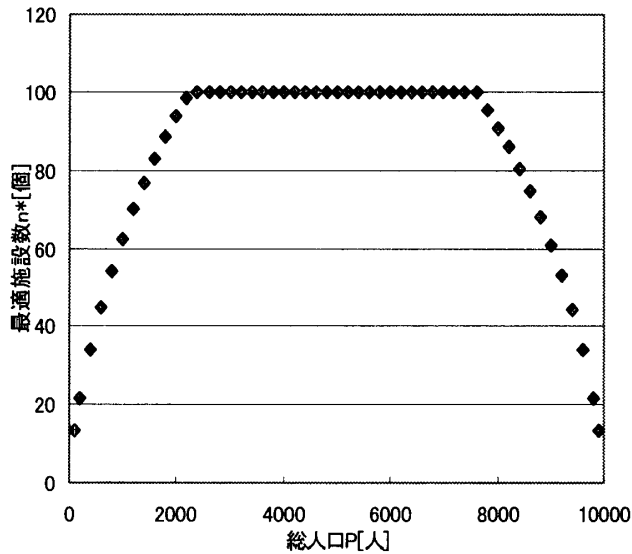


図 1: 総人口と最適施設数の関係

人口が少ない間は、人口の増加に伴って最適施設数は増加するが、ある人口以上のところで最適施設数は一定値 (= 窓口数) をとるようになる。さらに人口が増加すると最適施設数が減少することが読み取れる。最適施設数が実現したもとの一人当たり費

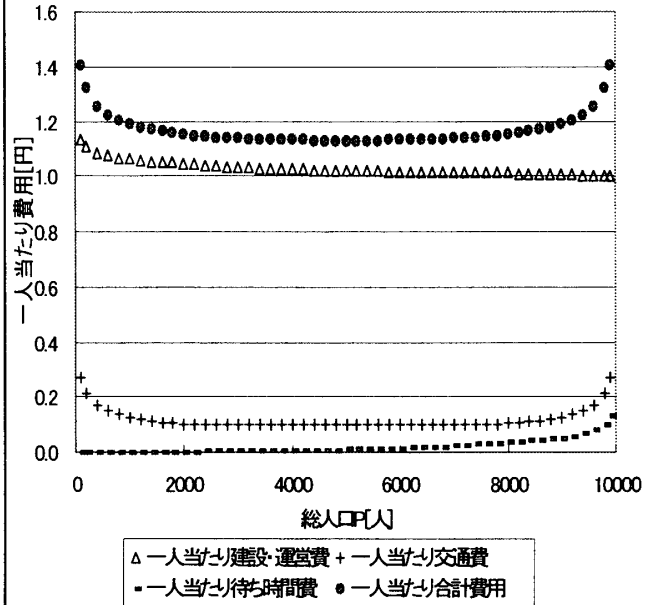


図 2: 総人口と一人当たり費用の関係

用は図 2 のとおりである。

人口が多いほど一人当たり建設・運営費は安くなるが、一人当たり待ち時間費は高くなる。人口が少ない間は人口の増加とともに最適施設数が増加し、一人当たり交通費は減少する。施設数が窓口数と同じになって一定値になると交通費も当然一定値を示す。人口が多くなると待ち時間費の爆発的な増加を緩和すべく一つの施設に複数窓口が割り当てられるようになり、施設数は減少する。したがって一人当たり交通費は人口の増加に従って増加するようになる。

一人当たり合計費用で見ると、なべ底型曲線が得られる。すなわち人口が多すぎても少なすぎても一人当たり費用が大きくなってしまうということであり、集住の利益と不利益が混在していることが分かる。また人口にはおのずと適正規模があるということも示唆される。最適施設数は都市の人口、面積、窓口数、交通網の発達度合等に依存するので、単純に人口何人当たり施設数や単位面積当たり施設数のみで多寡を比較できないことが分かる。

### 5. 参考文献

[1] 栗田 治(1999): 都市施設の適切な数に関する数理モデル-政令指定都市の区数に関する分析例-, 日本建築学会計画系論文集第 524 号, 169-176