2001 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

2種類の状態を考慮した ベイジアン Perishable Inventory Model

02103234 神戸商科大学大学院 * 川勝 英史 KAWAKATSU Hidefumi
大阪大学大学院 磯崎 泰樹 ISOZAKI Yasuki
神戸商科大学商経学部 上村 稔大 UEMURA Toshihiro
01105053 神戸商科大学商経学部 菊田 健作 KIKUTA Kensaku
01503164 神戸商科大学商経学部 濱田 年男 HAMADA Toshio

1. はじめに

食品や化学薬品などには有限の寿命があり，これらの商品は寿命を迎えると廃棄される．このような商品を取り扱った在庫管理モデルは「Perishable Inventory Model」と呼ばれ，この種のモデルは Nahmias[1] や Fries[2] が任意の寿命をもつ商品に対するモデルを提案して以来，多数報告されている [1-4]．最適発注量に関する分析に関して，Nahmias[1] のモデルは，期待廃棄量の計算が発注した時点にできることから解析上取り扱いやすい．このため Nahmias のモデルは，多くのモデルに引用されている [3]．一方，Fries[2] のモデルは，現在廃棄される量を廃棄量として計算するため，最適発注量を実際に計算することに適している．

ところで上述したモデルにおいては，発生する需要量は過去の情報に依存しないことが想定されている．これに対して，Azoury[5] は商品の寿命が無限大である場合に，需要の分布のパラメータは未知であるが自然共役事前分布に従う場合のモデルを提案している．また筆者らも，商品の寿命及び計画期間が有限である場合に，「良く売れる」場合と「余り売れない」場合の 2 種類の状態を考慮し，過去の情報に基づいて状態の起こる確率を推測するようなモデルを提案している [4]．本研究でも，同様の観点から過去の情報を学習することを考慮し，この上で 1 回当り発注費用が発注量に応じて変化する場合のモデルを提案する．さらに，本モデルにおける状態は，マルコフ連鎖のうちのポリヤのつぼに従って推移するという点に着目し，発注量に関する分布の特徴を数値例により考察する．

2. モデル

本研究では以下を仮定する．(1) 計画期間は既知で有限である．(2) 新品の商品が到着し，商品の寿命は有限の m 期間である．(3) 2 種類の状態「Good State」と「Bad State」とが存在する．また，どちらの状態が起こるかはパラメータ (w_G, w_B) $(w_G, w_B \geq 1)$ のベータ分布に従うが，この理由については後述する．(4) 現在の状態が Good のとき D^G 単位の需要が発生し，現在の状態が Bad のとき需要は D^B 単位起こる．但し，D^G と D^B は，それぞれ既知の密度関数 $f^G(\cdot)$，$f^B(\cdot)$，分布関数 $F^G(\cdot)$，$F^B(\cdot)$，平均 μ_G，μ_B $(\mu_G > \mu_B)$ をもつ互いに独立な確率変数である．また，$a \geq 0$ に対して $F^G(a) < F^B(a)$ である．(5) リードタイムは 0 であり，入庫速度は無限大である．(6) 緊急調達を認めるがバックログは考慮しない [2]．(7) 商品 1 単位を価格 p で販売する．(8) 次のような費用を考慮する．すなわち，$c =$ 商品 1 単位当り購入費用，$h =$ 商品 1 単位を 1 期間維持する費用，$r =$ 商品 1 単位当り品切れ費用 $(p > r > c)$，$\theta =$ 商品 1 単位当り廃棄費用，$K(y) =$1 回当り発注費用である．

ここに，$K(y) = \begin{cases} s \cdot \lceil y/b \rceil, & y > 0 \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$ であり，y は発注量，b はコンテナやトラックの荷台などの容量を表す定数である．また，商品を発注する際，商品 b 単位につき費用 s が必要となる．なお，$\lceil a \rceil$ は小数点以下の切り上げを意味する．

さらに，$Y = \begin{cases} 1, & \text{Good State が起こる}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$ とすると，未知のパラメータ π をもつベルヌーイ確率変数の確率関数は $\psi(Y = i|\pi) = \pi^i(1-\pi)^{1-i}$ $(i = 0, 1)$ により与えられる．但し，ベルヌーイ試行の未知の生起確率 π についての推測を行うための自然共益事前分布はベータ分布である．このため，ここでは未知の π は，仮定 (3) で述べたように，パラメータ (w_G, w_B) のベータ分布に従うとする．従って，Good State が起これば π の事後分布はパラメータ $(w_G + 1, w_B)$ のベータ分布となり，そうでなければ π の事後分布はパラメータ $(w_G, w_B + 1)$ のベータ分布となる [6]．

なお，本研究で導出した期待利益において，状態 Good 及び Bad はマルコフ連鎖のうちのポリヤのつぼに従って起こることが確認できる．

3. 期待利益

ここでは，残り期間の最大期待利益を導出する．1期間の需要量を u，発注量を y，残り寿命が i 期間である商品数を x_i $(i=1,\cdots,m-1)$ とし，$\boldsymbol{x}=(x_{m-1},x_{m-2},\cdots,x_1)$ とする．また，u は実際に観測された需要量であるとき，残り寿命が i である商品の繰越在庫量を $z_i(\boldsymbol{x},y,u)$ とし，この vector-valued 関数を $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)$ とする．さらに，$\mathbf{1}\equiv(1,1,\cdots,1)$ とし，$\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\mathbf{1}$ との内積とすると，w_G と w_B との情報が与えられたという条件のもとでの残り n 期間の最大期待利益 $A_n(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)$ は次式により与えられる．

$$
\begin{aligned}
&A_n(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)\\
&= \sup_{y\geq 0}\Bigg\{-K(y)-cy+\int_0^1 \psi(Y=1|\pi)\Bigg[L^G(\boldsymbol{x},y)\\
&\quad +\int_0^\infty A_{n-1}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)|w_G+1,w_B)f^G(u)du\Bigg]\\
&\quad \times g(\pi|w_G,w_B)d\pi\\
&\quad +\int_0^1 \psi(Y=0|\pi)\Bigg[L^B(\boldsymbol{x},y)\\
&\quad +\int_0^\infty A_{n-1}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)|w_G,w_B+1)f^B(u)du\Bigg]\\
&\quad \times g(\pi|w_G,w_B)d\pi\Bigg\}, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここに，$i=\mathrm{G}$ or B に対して

$$
\begin{aligned}
L^i(\boldsymbol{x},y) &= p\int_0^\infty uf^i(u)du-\theta\int_0^{x_1}(x_1-u)f^i(u)du\\
&\quad -h\int_0^{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y-u)f^i(u)du\\
&\quad -r\int_{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}^\infty(u-\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}-y)f^i(u)du \qquad (2)
\end{aligned}
$$

である．ここで，ベータ分布の密度関数の基本的な性質を用いると，式 (1) の $A_n(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)$ は以下のよう計算される．

$$
\begin{aligned}
&A_n(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)\\
&= \sup_{y\geq 0}\Bigg\{-K(y)-cy+\frac{w_G}{w_G+w_B}\Bigg[L^G(\boldsymbol{x},y)\\
&\quad +\int_0^\infty A_{n-1}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)|w_G+1,w_B)f^G(u)du\Bigg]\\
&\quad +\frac{w_B}{w_G+w_B}\Bigg[L^B(\boldsymbol{x},y)\\
&\quad +\int_0^\infty A_{n-1}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)|w_G,w_B+1)f^B(u)du\Bigg]\Bigg\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

同様にして，残り1期間の最大期待利益は以下のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&A_1(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)\\
&= \sup_{y\geq 0}\Bigg\{-K(y)-cy\\
&\quad +\frac{w_G}{w_G+w_B}L^G(\boldsymbol{x},y)+\frac{w_B}{w_G+w_B}L^B(\boldsymbol{x},y)\Bigg\} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

定理 1. (i) $n=k=1$ の場合，$A_1(\boldsymbol{x}|w_G,w_B+1)\leq A_1(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)\leq A_1(\boldsymbol{x}|w_G+1,w_B)$ が成立する．(ii) $n=k>1$ の場合，$\rho_{k-1}^B(\boldsymbol{x},y|w_G,w_B+1)\leq \rho_{k-1}^B(\boldsymbol{x},y|w_G,w_B)\leq \rho_{k-1}^G(\boldsymbol{x},y|w_G,w_B)\leq \rho_{k-1}^G(\boldsymbol{x},y|w_G+1,w_B)$ のとき，$A_k(\boldsymbol{x}|w_G,w_B+1)\leq A_k(\boldsymbol{x}|w_G,w_B)\leq A_k(\boldsymbol{x}|w_G+1,w_B)$ が成り立つ．

ここで，$\rho_n^j(\boldsymbol{x},y|s,t)=-\int_0^\infty \frac{\partial A_n(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u)|s,t)}{\partial u}F^j(u)du$ $(j=\mathrm{G}$ or $\mathrm{B})$ である．

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] S. Nahmias, Optimal ordering policies for perishable inventory-II, *Operations Research*, **23**, (1975), 735-749.

[2] B.E. Fries, Optimal ordering policy for a perishable commodity with fixed lifetime, *Operations Research*, **23**, (1975), 46-61.

[3] H. Ishii and T. Nose, Perishable inventory control with two types of customers and different selling prices under the warehouse capacity constraint, *Int. J. Production Economics*, **44**, (1996), 167-176.

[4] H. Kawakatsu, K. Kikuta and T. Hamada, Bayes solution to dynamic perishable inventory problem with two types of states, *Scientiae Mathematicae Japonicae* (to appear).

[5] K.S. Azoury, Bayes solution to dynamic inventory models under unknown demand distribution, *Management Science*, **31**, (1985), 1150-1160.

[6] H.M.Degroot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York(1970).