

# 予測更新を考慮した在庫モデル

01012560 東京工業大学 飯田 哲夫  
Duke University Paul Zipkin

## 1 はじめに

本研究では、予測更新モデルに基づく動的予測・在庫モデルを取り扱う。予測更新モデルとは、将来の需要に対する予測を各期毎に更新するモデルを指し、ここでは、Heath and Jackson [2] と Graves, et. al [1] らが独立に開発した Martingale Model for Forecast Evolution (MMFE) を用いる。MMFE を用いる利点は2つある。第1には、需要の予測値のみを扱うため、予測モデルを直接考慮する必要が無い点である。しばしば、需要予測は予測を行う人の経験や将来に行うマーケティング活動に基づいてなされることがあるが、それらをモデル化することは通常困難である。第2には、非定常な需要を扱うことができる点である。

予測を考慮した在庫モデルの研究は、これまでいくつかなされてきている。代表的なものとして、Johnson and Thompson [3] は、ARMA 過程に需要が従う場合を扱っており、ある条件の下で近視眼的政策の最適性を示している。Song and Zipkin [4] は、需要分布がマルコフ連鎖に従う環境に依存するモデルを扱っている。Zipkin [5] に、需要が環境に依存する場合のモデルがまとめられている。

本研究では、予測更新モデルを用いた予測・在庫モデルを多次元の状態空間をもつ動的計画問題として定式化し、その最適政策の性質を調べる。また、近視眼的政策が最適となる条件についても議論する。多次元の動的計画問題は、通常解くことが困難であるため、ここでは近似的に解く方法を開発する。

## 2 定式化

以下のような有限期間問題を考える。計画期間を  $T$  とする。各期の需要は後述する予測更新モデルに従うものとする。需要は必ずしも定常である必要はない。リードタイムは考えない（ただし、固定リードタイムへはそのまま拡張可能である）。満たされない需要はバックログされる。各期末に在庫保持費用および在庫不足費用が発生し、それぞれ線形とする。

### 予測更新モデル

$D_{t,s}$  を  $t$  期における  $s$  期に対する需要予測とする。 $D_{t,t}$  は  $t$  期における実際の需要を表す。2種類のモデルを取り扱う。

#### 1. 加法的更新モデル

$e_{t,s} \equiv D_{t,s} - D_{t-1,s}$  を  $t$  期における  $s$  期の需要に対する予測更新とし、 $s < t$  に対しては、 $e_{t,s} \equiv 0$  とする。そして、 $E[e_{t,s}] = 0$  と仮定する。これは、予測更新は  $t$  期以前には知られていない新しい情報から成っていることを意味する。予測更新は各期毎に独立とするが同一分布に従うとは限らないものとする。また、同じ期における予測更新は従属していてもよい。

#### 2. 乗法的更新モデル

加法的更新モデルと同様に定義される。 $e_{t,s} \equiv D_{t,s}/D_{t-1,s}$  とし、 $s < t$  に対しては  $e_{t,s} \equiv 1$  とする。そして、 $E[e_{t,s}] = 1$  と仮定する。各期毎に独立とするが同一分布に従うとは限らないものとする。また、同じ期における予測更新は従属していてもよい。

定式化の際、用いる記号は以下のとおりである。

- $x_t$ :  $t$  期の発注前有効在庫量,
- $y_t$ :  $t$  期の発注後有効在庫量,
- $h_t, p_t$ :  $t$  期の単位当たり在庫保持費用と在庫不足費用,  $0 < h_t \leq h, p_t > 0$ ,
- $\alpha$ : 割引率  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,
- $D_t^T$ :  $t$  期末における需要予測ベクトル,  $D_t^T = (D_{t,t+1}, D_{t,t+2}, \dots, D_{t,T})$ ,
- $e_t^T$ :  $t$  期における予測更新ベクトル,  $e_t^T = (e_{t,t+1}, e_{t,t+2}, \dots, e_{t,T})$ ,
- $J_{t,T}$ :  $t$  期から  $T$  期末までにかかる最小の割引かれた期待費用,

そして、 $(x_t, D_{t-1}^T)$  を状態にとる。 $(a)$  は  $a$  の第1要素を除いたベクトルを表す。また、

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{加法的更新のとき,} \\ x \cdot y & \text{乗法的更新のとき,} \end{cases}$$

とする。そのとき、 $T$ -期間問題に対して以下の再帰方程式を得る。

$$J_{t,T}(x, \mathbf{D}) = \min_{y \geq x} \left\{ C_t(y, D_1) + \alpha E J_{t+1,T}(y - \Theta(D_1, e_{t,t}), \Theta(\mathbf{D}), e_t^T) \right\}, \quad (1)$$

ただし、 $J_{T+1,T}(x) = 0$ 、そして、

$$C_t(y, D_1) = h_t E(y - \Theta(D_1, e_{t,t}))^+ + p_t E(y - \Theta(D_1, e_{t,t}))^-$$

**注意 1** この問題に対して基点在庫政策が最適となることが示される。そして最適な基点在庫政策は、需要予測ベクトルに依存する。 $t$ 期の最適な基点在庫水準を $y_{t,T}^*(\mathbf{D})$ と表す。

**注意 2** 最適基点在庫水準は、需要予測ベクトルに関して単調である、つまり、 $\mathbf{D}_1 \geq \mathbf{D}_2$ ならば、 $y_{t,T}^*(\mathbf{D}_1) \geq y_{t,T}^*(\mathbf{D}_2)$ となる。

### 3 最適基点在庫水準

最適基点在庫水準が計画期間 $T$ に関して単調に変化することが示される。

**定理 1**  $\forall t \leq T, \forall \mathbf{D}_{t-1}^T$ 、および $\forall \mathbf{D}_{t-1, T+1}$ に対して、

$$y_{t,T}^*(\mathbf{D}_{t-1}^T) \leq y_{t,T+1}^*(\mathbf{D}_{t-1}^{T+1}),$$

ただし、 $\mathbf{D}_{t-1}^{T+1} = (\mathbf{D}_{t-1}^T, D_{t-1, T+1})$ 。

次に、最適基点在庫水準の下限を求める。割引率 $\alpha < 1$ と仮定する。 $k$ -期間問題に関して、境界条件を

$$J_{k+1, k, T}^L(x) \equiv \frac{h(1 - \alpha^{T-k})}{1 - \alpha} \cdot x,$$

として、(1)式を解いたときの最適基点在庫水準を $y_{t, k, T}^L(\mathbf{D}_{t-1}^k)$ と表す。

**定理 2**  $\forall k \leq T, \forall t \leq k, \forall \mathbf{D}_{t-1}^k, \forall D_{t-1, k+1}, \dots, D_{t-1, T}$ に対して、

$$y_{t, k, T}^L(\mathbf{D}_{t-1}^k) \leq y_{t, T}^*(\mathbf{D}_{t-1}^T),$$

ただし、 $\mathbf{D}_{t-1}^T = (\mathbf{D}_{t-1}^k, D_{t-1, k+1}, \dots, D_{t-1, T})$ 。

十分に長い計画期間に対する最適基点在庫水準の下限は $y_{t, k, \infty}^L(\mathbf{D})$ と表される。考慮する計画期間の長さを $k$ とすると、 $k$ を長くするにつれて、最適基点在庫水準 $y_{t, k}^*(\mathbf{D})$ は減少し、 $y_{t, k, \infty}^L(\mathbf{D})$ は増加する。それらの差は、ある条件の下で、指数的にゼロに収束することが示される。

区間 $[y_{t, k, \infty}^L(\mathbf{D}), y_{t, k}^*(\mathbf{D})]$ を $Y_{t, k}(\mathbf{D})$ と表す。そのとき、

$$m_{t, k}(\mathbf{D}) \equiv \inf_{y \in Y_{t, k}(\mathbf{D})} \partial^2 C(y, D_1) / \partial y^2,$$

と定義する。

**定理 3**  $\forall y, \forall \mathbf{D}, \exists l \geq t$ に対して、 $m_{t, l}(\mathbf{D}) > 0$ ならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_{t, k}^*(\mathbf{D}) - y_{t, k, \infty}^L(\mathbf{D})) = 0.$$

**注意 3**  $y_{t, k}^*(\mathbf{D})$ と $y_{t, k, \infty}^L(\mathbf{D})$ の差がゼロに収束するオーダーは、 $O(\alpha^k)$ である。

### 4 予測更新期間の導入

各期毎に行われる需要予測の更新において、将来の $M$ 期間のみ更新するモデルを考える。そのとき、 $t-1$ 期末における需要予測ベクトルのうち、 $M$ 期間より先の将来については、

$$D_{t-1, t+M-1} = D_{0, t+M-1}, \dots, D_{t-1, T} = D_{0, T},$$

となるため、状態空間の次元が $M$ 次元まで縮小する。

紙面の都合上、近視眼的政策についての考察および、ここで定式化された多次元の動的計画問題を近似的に解くアルゴリズムについては、ここでは省略するけれども、発表当日は紹介する予定である。

### 参考文献

- [1] Graves, S. C., Meal, S., Dasu, Y. and Qin, Y., "Two-stage Production Planning in a Dynamic Environment", S.Axsater, C.Schneeweiss and E.Silver, eds. *Multi-Stage Production Planning and Control*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin. 266 9-43.
- [2] Heath, D. C. and Jackson, P. L., "Modeling the Evolution of Demand Forecasts with Application to Safety Stock Analysis in Production/Distribution Systems", *IIE Transactions*, 26(1994) 17-30.
- [3] Johnson, G. and Thompson, H., "Optimality of Myopic Inventory Policies for Certain Dependent Demand Process", *Management Science*, 21(1975) 1303-1307.
- [4] Song, J. S. and Zipkin, P., "Inventory Control in a Fluctuating Demand Environment", *Operations Research*, 41(1993) 351-370.
- [5] Zipkin, P., *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, 2000.