

## 最初の故障に対して取替えを行う保証契約モデル

02800014 流通科学大学大学院 \* 林坂 弘一郎 RINSAKA Koichiro  
01204194 流通科学大学情報学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki

## 1. はじめに

著者ら [1] は信頼性を考慮した代理業者と顧客の保証期間延長契約モデルを提案している。ここでは、保証期間中の最初の故障に対して取替えを行う場合 [2] の保証契約について考える。

## 2. モデル

システム導入後の保証期間を  $\tau (> 0)$ 、システムの運用計画期間を  $T (> \tau)$  とする。保証期間中  $(0, \tau]$  にシステムが故障すればメーカー、あるいは保守代理業者（以降、保守代理業者と呼ぶ）が無料で保守を行う。保証期間後  $(\tau, T]$  にシステムが故障した場合には各故障に対して  $C_s (> 0)$  の料金で保守を行う。保守代理業者は以下の 3 種類のオプションを提供していると仮定する。

(1) オプション  $A_1$  保守代理業者は契約料金  $P_a (> 0)$  を追加することで保証期間中の最初の故障に対して無料で取替えを行う。取替えたシステムが残る保証期間中に更に故障した場合には無料で保守を行う。保証期間後は各故障につき  $C_s$  の料金で保守を行う。

(2) オプション  $A_2$  保守代理業者は保証期間中の故障に対しては無料で保守を行い、保証期間後は各故障につき  $C_s$  の料金で保守を行う。

(3) オプション  $A_0$  システムを購入しない。

オプション  $A_1$  の契約の下では、最初の故障に対して保守代理業者は無料で取替えを行う。しかし、これ以外の故障に対しては、保守代理業者は小修理を行い、保守後のシステムの信頼度は故障前のそれと等しくなると仮定する。最初の故障時刻を  $X_1$  とし、保証期間後の故障回数を  $N_1$  とする。このとき  $N_1$  は

$$\Pr\{N_1 = n\} = \begin{cases} \frac{[H(T-X_1)-H(\tau-X_1)]^n}{n!} \times e^{-[H(T-X_1)-H(\tau-X_1)]} & X_1 \leq \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{[H(T)-H(\tau)]^n}{n!} e^{-[H(T)-H(\tau)]} & X_1 > \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

を満たす。ここで、 $H(t)$  は非同次ポアソン過程の平均値関数である。なお、修理は瞬時に終了するものと仮定する。

これに対して、オプション  $A_2$  の下で、保証期間後の故障回数を  $N_2$  とすると、 $N_2$  は

$$\Pr\{N_2 = n\} = \frac{[H(T)-H(\tau)]^n}{n!} e^{-[H(T)-H(\tau)]} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

を満たす。

## 3. 顧客の期待効用

ここでは、 $A_1, A_2, A_0$  の 3 種類のオプションを選択した場合の顧客の期待効用を導出する。オプション  $A_k$  を選択したときの顧客の金銭的利潤を  $\omega(A_k)$ 、 $k = 0, 1, 2$  と書き、効用を  $U[\omega(A_k)]$ 、 $k = 0, 1, 2$  と書くこととする。以下では、顧客の効用関数として次式で与えられる絶対的危険回避度一定の効用関数を用いる。

$$U[\omega(A_k)] = [1 - e^{-\beta\omega(A_k)}] / \beta, \quad \beta > 0 \quad (3)$$

なお、 $\beta$  は顧客のリスクに対する態度を表し、式 (3) の効用関数をもつ顧客は危険回避的な主体である。

オプション  $A_1$  を選択したとき、保証期間中の最初の故障に対しては無料で取替えが実施される。更に、保証期間中の 2 回目以降の故障に対しては無料で、保証期間後の故障については  $C_s$  の費用で小修理を行うこととなる。システムの導入費用を  $P_s (> 0)$  とすると、顧客にかかる費用はシステム導入費用  $P_s$ 、取替保証契約費用  $P_a$ 、及び保証期間後の保守費用  $C_s N_1$  となる。システムの運用によって得られる単位時間当りの収益を  $R (> 0)$  とする。式 (1)、(3) より、オプション  $A_1$  を選択したときの顧客の期待効用は次式となる。

$$E[U(A_1; P_a, C_s)] = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - e^{-\beta(RT - P_s - P_a)} \times \left[ \int_0^\tau e^{-[H(T-x)-H(\tau-x)](1-e^{\beta C_s})} dF(x) + e^{-[H(T)-H(\tau)](1-e^{\beta C_s})} \bar{F}(\tau) \right] \right\} \quad (4)$$

オプション  $A_2$  において、システムの運用により発生する収益はオプション  $A_1$  のときと同様である。顧客にかかる費用はシステムの導入費用  $P_s$  と保証期間後の保守費用  $C_s N_2$  である。したがって、式 (2)、(3) より、オプション  $A_2$  を選択したときの顧客の期待効用は次式となる。

$$E[U(A_2; P_a, C_s)] = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - e^{-\beta(RT - P_s) - [H(T)-H(\tau)](1-e^{\beta C_s})} \right] \quad (5)$$

オプション  $A_0$  を選択した場合、つまりシステムを購入しなかった場合、収益も費用も発生しない。したがって、顧客の期待効用は次式となる。

$$E[U(A_0; P_a, C_s)] = 0 \quad (6)$$

#### 4. 保守代理業者の期待利益

顧客がオプション  $A_k (k = 0, 1, 2)$  を選択したときの保守代理業者の期待利益を  $E[\pi(P_a, C_s; A_k)]$  と書くこととする。このとき、 $E[\pi(P_a, C_s; A_k)]$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} & E[\pi(P_a, C_s; A_1)] \\ &= P_a - P_s F(\tau) \\ & - C_r \left\{ \int_0^\tau H(T-x) dF(x) + [H(T) - H(\tau)] \bar{F}(\tau) \right\} \\ & + C_s \left\{ \int_0^\tau [H(T-x) - H(\tau-x)] dF(x) \right. \\ & \left. + [H(T) - H(\tau)] \bar{F}(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$E[\pi(P_a, C_s; A_2)] = [H(T) - H(\tau)] C_s - H(T) C_r, \quad (8)$$

$$E[\pi(P_a, C_s; A_0)] = 0 \quad (9)$$

となる。

#### 5. 最適戦略

##### 5.1 顧客の最適戦略

はじめに、オプション  $A_1$  と  $A_2$  の比較を行う。 $E[U(A_1; P_a, C_s)] = E[U(A_2; P_a, C_s)]$  としてこれを  $P_a$  に関して解くと、次式のような無差別曲線が得られる。

$$\begin{aligned} P_a = & \frac{1}{\beta} \left\{ -\xi (1 - e^{\beta C_s}) \right. \\ & \left. - \ln \left[ \int_0^\tau e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})} dF(x) + e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})} \bar{F}(\tau) \right] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

なお、 $\rho(x) = H(T-x) - H(\tau-x)$ 、 $\xi = H(T) - H(\tau)$  である。式(10)の右辺を  $\Psi_1(C_s)$  と書くこととする。このとき、 $H''(t) = [h(t)]' > 0$  であれば、 $d\Psi_1(C_s)/dC_s \geq 0$  である。すなわち、 $\Psi_1(C_s)$  は  $C_s$  に関して単調増加関数である。

次に、 $E[U(A_1; P_a, C_s)] = 0$  を  $P_a$  について解き  $P_a$  の留保価格を  $\Psi_2(C_s)$  とすると、

$$\begin{aligned} & \Psi_2(C_s) \\ &= RT - P_s - \frac{1}{\beta} \\ & \times \ln \left[ \int_0^\tau e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})} dF(x) + e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})} \bar{F}(\tau) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 $\Psi_2(C_s)$  は  $C_s$  に関して単調減少である。

更に、 $E[U(A_2; P_a, C_s)] = 0$  として  $C_s$  の留保価格を  $\bar{C}_s$  とすると

$$\bar{C}_s = \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{\beta(RT - P_s)}{\xi} + 1 \right] \quad (12)$$

となり、 $\bar{C}_s$  は  $P_a$  軸と平行な直線となる。ここで、 $\Omega_i (i = 0, 1, 2)$  を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(P_a, C_s) : P_a \geq \Psi_2(C_s), C_s \geq \bar{C}_s\} \\ \Omega_1 &= \{(P_a, C_s) : P_a < \Psi_1(C_s), P_a < \Psi_2(C_s)\} \\ \Omega_2 &= \{(P_a, C_s) : P_a \geq \Psi_1(C_s), C_s < \bar{C}_s\} \end{aligned}$$

このとき、顧客の最適戦略  $A^*(P_a, C_s)$  は次式となる。

$$A^*(P_a, C_s) = \begin{cases} A_1 & \text{if } (P_a, C_s) \in \Omega_1 \\ A_2 & \text{if } (P_a, C_s) \in \Omega_2 \\ A_0 & \text{if } (P_a, C_s) \in \Omega_0 \end{cases} \quad (13)$$

##### 5.2 保守代理業者の最適戦略

保守代理業者の最適戦略は顧客の反応を考慮したうえで自身の期待利益が最大となるような  $(P, C_s)$  の組み合わせである。

(1) オプション  $A_1$  のとき  $(P_a, C_s) \in \Omega_1$  のとき、顧客はオプション  $A_1$  を選択し、このときの保守代理業者の期待利益は式(7)で与えられる。式(7)を  $P_a, C_s$  に関して偏微分するとそれぞれ正となることから、保守代理業者の期待利益は  $\Psi_2(C_s)$  上のある1点において最大となる。ここで、式(10)を式(7)の  $P_a$  に代入し、これを  $\Pi(C_s)$  と書くこととすると、 $\Pi(C_s)$  は

$$\begin{aligned} & \Pi(C_s) \\ &= RT - P_s [1 + F(\tau)] - \frac{1}{\beta} \\ & \times \ln \left[ \int_0^\tau e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})} dF(x) + e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})} \bar{F}(\tau) \right] \\ & + C_s \left[ \int_0^\tau \rho(x) dF(x) + \xi \bar{F}(\tau) \right] \\ & - C_r \left[ \int_0^\tau H(T-x) dF(x) + \xi \bar{F}(\tau) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。なお、 $\Pi(C_s)$  の単調性を解析的に示すことは困難である。

(2) オプション  $A_2$  のとき  $(P_a, C_s) \in \Omega_2$  のとき、顧客の選択はオプション  $A_2$  となり、保守代理業者の期待利益は式(8)で与えた。式(8)を  $C_s$  に関して微分すると正となる。したがって、保守代理業者の期待利益を最大にするのは  $C_s^* \rightarrow \bar{C}_s - 0$  かつ  $P_a^* > \Psi_2(C_s^*)$  のときである。

(3) オプション  $A_0$  のとき  $(P_a, C_s) \in \Omega_0$  のとき、顧客はオプション  $A_0$  を選択する。このとき、保守代理業者は自身の期待利益を制御することはできない。

以上のことから、顧客がオプション  $A_1$  または  $A_2$  を選択した場合の保守代理業者の期待利益が少なくとも一方でも正となる場合、自身の期待利益が最大となるオプションを顧客に選択させることが保守代理業者の最適戦略となる。

なお、紙数の都合上、数値例は当日発表させて頂く。

#### 参考文献

- [1] 林坂弘一郎, 三道弘明, “保証期間延長契約に関する一考察,” 電子情報通信学会論文誌, Vol.J84-A, No.4, pp.528-542, 2001.
- [2] K. Rinsaka, H. Sandoh, and T. Nakagawa, “Preventive replacement policy under warranty with one corrective replacement and minimal repairs,” *Proc. of 10th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Vol.2, pp.887-892, 2001.