計り直しの問題(離散型モデル)

01204194　流通科学大学情報学部　三道　弘明　SANDOH Hiroaki
01400043　愛知工業大学経営情報科学部　中川　覃夫　NAKAGAWA Toshio

1. はじめに

化学薬品を生産する工程の最終段階で，ドラム缶や袋に詰められた製品の重量を測定し，その測定結果を製品に記載するという工程がある．この計量工程では，製品の重量が元来大きい関係もあり，秤自身に狂いが生じることが少なくない．狂いが発生した秤で製品を計量した場合，製品に記載された重量と実際の重量とが一致しないこととなる．以下ではこのような製品を不良品と見なすこととする．

一方，秤に対しては，毎日，作業開始直前と作業終了後に点検，調整が行われており，この点検によって初めて秤の狂いが検出される．作業終了時の点検の段階で秤に狂いが検出されると，その日一日に計量した製品のすべて，あるいは一部の計り直しが行われることとなる．但し，計り直しの終了後には，再度秤を点検することなく，そのまま製品を出荷するものとする．従って，計り直しの途中で再び秤に狂いが生じると，その時点以降に計量した製品はすべて不良品のまま出荷されることとなる．

こうした状況のもとでは，最適な計り直しの割合を求めることが問題となる．このような問題に対して著者らは，１日に計量すべき製品量を連続量と見なした上で，最後に計量した製品から過去に遡及して一定の割合 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ だけを計り直すことを提案し，最適な β を求めるためのモデルについて考察した [1].

ここでは，一日に計量する製品個数を n と書くとき，n 個を計り終えた段階で秤の点検を実施し，秤に狂いが検出されすると，最後に計量した製品から過去に遡って $r(r=0,1,2,\cdots,n)$ 個だけ計り直すという離散型モデルについて考察する．なお以下では，i 個目の製品を計量中に秤に狂いが発生する確率を $p_i(i=1,2,\cdots)$ と書くこととする．

2. 目的関数

プロセスの振る舞いは，毎朝の秤の点検，調整終了時点を再生点とする再生報酬過程 [2] を生成することは明らかである．以下では，次のように $Q_i(i=0,1,2,\cdots)$ を定義する．

$$Q_i \equiv \sum_{j=1}^{i} p_j, \quad i=1,2, \tag{1}$$

$$Q_0 \equiv 0 \tag{2}$$

このとき，n 個の製品を計量し終えた時点で秤に狂いが発生していない確率

$$P_1 = 1 - Q_n \tag{3}$$

である．また，$n-r$ 個の製品を計量し終えた時点では秤に狂いは生じていないが，n 個目の製品を計量し終えるまでに秤に狂いが発生する確率は

$$P_2 = Q_n - Q_{n-r} \tag{4}$$

である．さらに，$n-r$ 個目の製品を計量し終えるまでに秤に狂いが発生する確率は

$$P_3 = Q_{n-r} \tag{5}$$

となる．

明らかに

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1 \tag{6}$$

である．

2.1 不良率

秤に狂いが検出され，r 個の製品に対して計り直しを行った場合，再度秤に狂いが発生し不良品のまま出荷される製品数の期待値は

$$\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)p_i \tag{7}$$

である．よって，１日当たりに出荷される製品に含まれる不良品数の期待値 $D(r)$ は

$$D(r) = Q_n \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)p_i + \sum_{i=1}^{n-r}(n-r+1-i)p_i \tag{8}$$

である．これより，不良率 $R(r)$ は

$$
\begin{aligned}
R(r)& \\
&= \frac{D(r)}{n} \qquad (9)\\
&= \frac{Q_n\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)p_i+\sum_{i=1}^{n-r}(n-r+1-i)p_i}{n},\\
&\quad r=0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

となる．

2.2 期待費用

不良品を出荷した場合，製品1個当たりに発生する費用を c_1，製品1個当たりの計り直しに必要な費用を $c_2(<c_1)$ とするとき，1日当たりの期待費用 $C(r)$ は

$$
\begin{aligned}
C(r) &= c_1D(r)+c_2rQ_n,\\
&\quad r=0,1,2,\cdots,n \qquad (10)
\end{aligned}
$$

で与えられる．

3. 最適計り直し個数

3.1 不良率最小化

初めに，不良率 $R(r)$ を最小にするという意味での最適な計り直し個数について解析する．このとき $R(r)$ を最小にするには，$D(r)$ を r について最小にすればよい．

$$
\begin{aligned}
\Delta D(r) &\equiv D(r+1)-D(r)\\
&= Q_nQ_{r+1}-Q_{n-r}, \qquad (11)\\
&\quad r=0,1,2,\cdots,n-1
\end{aligned}
$$

よって $\Delta D(r)$ は r に関して増加関数である．また

$$
\begin{aligned}
\Delta D(0) &= Q_n(Q_1-1)<0 \qquad (12)\\
\Delta D(n-1) &= Q_n^2-Q_1 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

である．但し，$Q_1=p_1<1$ を仮定する．よって

(1) $Q_n^2-Q_1\le 0$
このとき，$\Delta D(r)\le 0$ となり，$r^*=n$ であり，次式を得る．

$$
D(r^*)=\frac{(n+1)Q_n^2-Q_n\sum_{i=1}^{n}ip_i}{n} \qquad (14)
$$

(2) $Q_n^2-Q_1>0$
このとき，不良率 $D(r)$ を最小にする $1<r^*<n$ が存在する．

3.2 期待費用最小化

期待費用 $C(r)$ の r に関する差分をとると

$$
\begin{aligned}
\Delta C(r) &\equiv C(r+1)-C(r)\\
&= c_1\left(Q_nQ_{r+1}-Q_{n-r}\right)+c_2Q_n,\\
&\quad r=0,1,2,\cdots,n-1 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

である．また $\Delta C(r)\ge 0$ は

$$
\frac{Q_{n-r}}{Q_n}-Q_{r+1}\le\frac{c_2}{c_1} \qquad (16)
$$

に等価であり，この左辺を $L(r)$ と表すこととすると，$L(r)$ は r に関して単調減少である．さらに

$$
\begin{aligned}
L(0) &= 1-p_1 \qquad (17)\\
L(n-1) &= \frac{p_1}{Q_n}-Q_n \qquad (18)
\end{aligned}
$$

が成立する．よって，最適計り直し個数 r^* は以下の通りとなる．

(1) $1-p_1\le c_2/c_1$.
このとき，$C(r)$ は r に関して単調増加．よって $r^*=0$ であり，次式を得る．

$$
C(r^*)=c_1\left[(n+1)Q_n-\sum_{i=1}^{n}ip_i\right] \qquad (19)
$$

(2) $p_1/Q_n-Q_n<c_2/c_1<1-p_1$.
この場合，期待費用 $C(r)$ を最小にする $0<r^*<n$ が存在する．

(3) $c_2/c_1\le p_1/Q_n-Q_n$.
このとき，$C(r)$ は r に関して単調減少．よって $r^*=n$ であり，次式が成立する．

$$
C(r^*)=c_1Q_n\left[(n+1)Q_n-\sum_{i=1}^{n}ip_i\right]+c_2nQ_n \qquad (20)
$$

4. 数値例

紙数の都合上，数値例は当日発表させて戴く．

参考文献

[1] 三道弘明，中川覃夫，太田俊彦: 化学薬品に対する最適計り直し量に関する一考察, オペレーションズ・リサーチ, **45**(2), pp. 76-80 (2000).

[2] Ross, S.M. : *Introduction to Probability Models, 6th edition,* Academic Press, New York, (1997).