非線形制約のもとで凹2次関数最小化における主双対内点法と分枝切除法

02005110 法政大学 *大脇 明丈
01900070 法政大学　若山 邦紘

1　はじめに

本研究では以下のように定式化される非線形制約，凹2次関数の最小化問題を取り上げる．

$$\mathrm{Min.}\ f(x)=c^T x - xDx$$

$$\mathrm{sub.to}\ \ g_i(x)\le 0 \quad i=1\cdots m$$

ただし，D は正定符号，制約式に変数の非負条件が含まれており，許容領域が有界閉集合であることを仮定する．

この問題の特徴は，一般に許容領域の境界上に局所的最適解が複数個存在する，制約条件が非線形であるため許容領域が非凸となりうることである．したがって，すべての境界上の点うちどれかが大域的最適解となるが，そのための必要十分条件が存在しないため，効果的な解法がないといってよい．そこで本研究は主双対内点法を適用し，切除平面法を用いた解法と分枝切除法を用いた解法の比較してみる．

2　主双対内点法

目的関数と制約条件から，新たに以下のようにラグランジュ関数を定義する．

$$L(w)=f(x)+yg(x)-zx$$

$$w=(x,y,z)$$

$$x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$$

このラグランジュ関数のKarush－Kuhn－Tucker(KKT)条件にバリヤパラメータ μ を導入した以下の方程式を考える．

$$r(w;\mu)\equiv\begin{pmatrix}\nabla_z L(w)\\ yg(x)\\ XZe-\mu e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (1)$$

それに対して，次のようなニュートン方程式を定義し，許容領域内の内点からニュートン法を用いステップ方向 $\Delta w(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ を決定する．

$$\begin{pmatrix}\nabla^2 L(w) & \nabla g(x) & -I\\ y\nabla g(x)^T & G & 0\\ Z & 0 & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\nabla L(w)\\ yg(x)\\ XZe-\mu e\end{pmatrix} \qquad (2)$$

ここで X は x_i, Z は z_i, G は $g_i(x)$ をそれぞれ対角成分に並べた対角行列，$\nabla_x L(w)$ は $L(w)$ の x における勾配ベクトル，$\nabla^2 L(w)$ はヘッセ行列である．このとき，許容領域からでないようなステップ幅を選択し解を更新し，境界上の点を導きだす．

3　初期値の選択

ここでは，目的関数と制約条件式から，新たに以下のような罰金関数 $F(x,k)$ を定義する．

$$\mathrm{min.}\quad F(x,k)=f(x)+k\sum_{i=1}^{m}\frac{\|\nabla g_i(x)\|}{g_i(x)} \qquad (3)$$

k : 罰金係数 (>0)

この $F(x,k)$ の罰金係数 k を大きくして $F(x,k)$ を凸関数としてその最小点を求める．その点を主双対内点法または主内点法の初期点とする．

*大脇明丈　法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

4　切除平面法の導入

主双対内点法と主内点法で得られた解の近傍の境界上の点が得られる．さらにこの解を改善するために切除平面法を導入する．この方法は，求められた境界上の点をもとに，その点に置ける目的関数値より大きい値をとる範囲の許容領域を取り除いていくものである．

以上の操作を反復して行い，すべての領域が取り除かれれば，それまでに得られた局所的最適解の中での最小解が大域的最適解である．

5　アルゴリズム

最初に内点法の一連の計算をまとめる．

Step1.　$\mu>0$ を与える．

Step2.　以下の内部反復によって，$\| r(w;\mu) \|$（主内点法の場合は $\| r(x,y) \|$）が十分小さくなるような $w(x,y)$ を見つける：

Step2.1　初期点 $\mathbf{w}$ を与える．

Step2.2　ニュートン法を用いていて探索方向を求める．

Step2.3　内点の要素が非負であるようなステップ幅を求める．

Step2.4　解を更新し，Step2.2 へ．

Step3.　μ の値が十分に小さければ，求まった値を解とみなして終了する．さもなければ，$\mu=\tau\mu$ $(0<\tau<1)$ とおいて Step1 へ．

次に切除平面法を導入したの一連の計算をまとめると以下のようになる．

Step1.　ラグランジュ関数を定義する．X：許容領域とする．

Step2.　$X=\phi$ のとき終了

Step3.　$F(x,k)$ が凸関数になるような $\mathbf{k}$ の値を定める．

Step4.　許容領域内の任意の点からニュートン法を用いて，$F(x,k)$ の最小点を求める．

Step5.　主双対内点法（主内点法）で境界上の点を求める．

Step6.　求めた境界上の点において，切除平面を決定し，それを制約条件式に加え step2 に戻る．

6　分枝切除法

分枝切除法は２つのステップに分けて計算する．最初に問題を線形近似しその変数に対して有効な境界を決める．次に緩和による目的関数の値が改善されるように再帰的にノードを加えていく．加えられたノードは実行不可能であれば破棄され，そうでなければ２つの新たなノードに分かれる．

7　おわりに

本研究では，非線形制約のもとで凹２次関数の最小化問題に対し，主双対内点法と切除平面法を併用したアルゴリズムと分枝切除法のアルゴリズムの比較を行った．実際の問題に対しての数値実験がまだ十分行われていない．そこで今後，数値実験を十分に行いその過程で分枝切除法と主双対内点法が効果的に組み合わさったアルゴリズムを提案することが課題である．

参考文献

[1]L.S.Lasdon,J,Plummer,G,Yu, "Primal-Dual and Primal Interior Point Algorithms for General Nonlinear Programs", ORSA Journal on Computing vol7, No3,95(1995)

[2]山下浩，今野浩，"非線形計画法"日科技連出版（1978）