最小拘束問題の分枝限定法

— これまでの課題の解決策 —

02203020　防衛大学校情報工学科　*坂森　義成　SAKAMORI Yoshinari
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡　靖詞　KATAOKA Seiji

1　はじめに

教官集合を $M(|M| = m)$，学生集合を $N(|N| = n)$ とする．各学生には複数の指導教官がおり，その対応は図1のような0-1行列で表現できる．卒論発表会において，各教官は，担当学生の発表開始から終了まで拘束される．このとき，教官の総拘束時間を最小化する（図2）ように学生の発表順序を決める問題を**最小拘束問題**（Minimum Binding Problem: MBP）と呼ぶ．

時限／学生	1／1	2／2	3／3	4／4	5／5	6／6	7／7	8／8	9／9	10／10	拘束時間
教官 1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	7
教官 2	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	10
教官 3	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	9
教官 4	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	10

図 1: スケジュール前・総拘束時間 36

時限／学生	1／2	2／3	3／4	4／8	5／7	6／1	7／5	8／10	9／6	10／9	拘束時間
教官 1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5
教官 2	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	5
教官 3	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	6
教官 4	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	8

図 2: 最適スケジュール後・総拘束時間 24

MBPに対しては，動的計画（DP）による厳密解法（DP-MBP）[1]，最遅拘束開始問題を用いた下界値算法 [2]，学生の前・後半固定による下界値の改善と分枝限定法 [4] が報告されている．本研究では，これらの研究成果に伴って新たに浮上した課題の解決策を考え，改良された分枝限定法の効果について報告する．

2　最遅拘束開始問題による下界値

教官の拘束開始時限のみに注目し，それを最も遅くする問題を**最遅拘束開始問題**（Latest-Start Binding Problem: LSBP）と呼ぶ．LSBPの目的関数は拘束が始まる前の0の数の最大化（図3参照）とし，最適値を LS とすると，$mn - 2LS$ はMBPの下界値を与える．

LSBPでは，ある解をもとに教官を拘束開始順に入れ換えても一般性を失うことはなく，その結果，図3のように0-1行列を拘束開始時限を境にブロック対角化することができる．また，これらのうち任意の連続するブロック対角化成分から誘導される部分0-1行列を B（図3太線）とすると，LSBPの最適解には，次の性質が成り立つ．

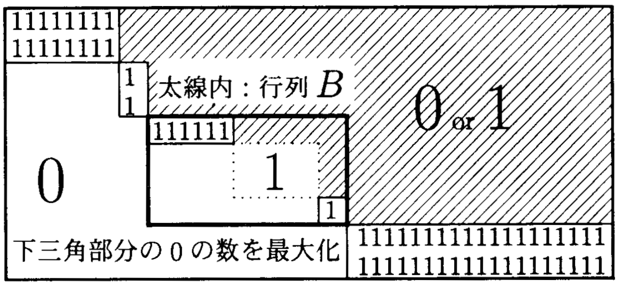

図 3: 教官を拘束開始順に並べる

1. ブロック対角成分の要素はすべて1である．
2. 部分行列 B で独立にLSBPを解いた最適解は，もとの行列でのLSBPの最適解（B 内）と一致する．

これらの性質より，拘束開始の遅い順に教官を定めながらLSBPの厳密解を求めるDP解法（DP-LS）が構築できる．集合 $T(\subseteq M)$ を教官の部分集合，$g(T)$ を教官集合 T におけるLSBPの最適値とする．このとき，漸化式 $g(T) = \max_{t \in T}\{g(T \setminus \{t\})\} + d(T)$ が成り立つ．ただし，$g(\emptyset) = 0$ であり，$d(T)$ は教官集合 T で担当しない学生数になる．

3　これまでの研究成果と課題

MBPに対して加治屋らが以下の成果をあげてきた．

1. DP解法（DP-MBP）[1] では，同一パターンは連続する性質 [3] を利用し，相異なるパターン数が25くらいまでの問題を解くことに成功した．
2. LSBPによる下界値算法 [2] を提案し，ひとりの学生を前半に固定することで下界の改善 [3] をした．
3. 複数の学生を前半または後半に固定する戦略を用いて，LSBPによる分枝限定法を開発した [4].

これらの成果に伴い，新たに以下の課題が浮上した．

1. LSBPによる下界値算法では同一パターンの連続する性質が考慮されていない．
2. 学生全員が前半・後半に最適に分割されていても，LSBPによる下界計算で実行可能解が得られず，分枝を見切ることができない場合がある．
3. 1の密度が疎な問題では，下界値が低くなり過ぎて，膨大な数の分枝が行われてしまう．

本研究では上記の課題うち特に1番目について解決策を報告する．2番目に関しては，元の問題の学生数 $n=50$ 程度であれば，前半・後半それぞれ独立に DP-MBP を適用することで解決できる．3番目については，疎行列では同一パターンの出現する確率が高いので，本研究の成果により，ある程度解決できると考えられる．また，本質的な解決策については，分枝戦略として前半・中半・後半に3分割する方法が考えられるが，その詳細については割愛するが，これまでの成果のほとんどが，そのまま適用できる．

4 同一パターンを考慮した LSBP

MBP の最適解では，同一指導パターンを持つ学生がいる場合，それらの学生は連続して発表する性質がある [3]．この性質を LSBP の制約として付加することで，実行不可能な固定をしている分枝を見切ったり，下界値のさらなる改善が期待できる．

加治屋・坂森ら [4] 同様，学生集合 S_F の前半，S_L の後半固定を考える．また，[4] におけるケース2のように，DP-LS で教官集合 T における $g(T)$ を求める際，後半に S_F のうち非空の学生が割当てられる場合，あるいは前半に S_L のうち非空の学生が割当てられる場合とを仮定する．そうでなければ，DP-LS は何ら問題なく S_F, S_L をそれぞれ前半，後半に割当てることができる．また，前半・後半の境界となる時限を $\bar{k}$ とする．

T を現在考慮中の教官集合，S_T を T の担当に関わる学生集合，$S_{T_f}(=S_T \cap S_F)$ を S_T のうち前半に固定される学生集合（図4の陰影部），$S_{T_\ell}(=S_T \cap (N \setminus S_L))$ を $N \setminus S_T$ のうち後半に固定される学生集合，P_j を学生 j と同一パターンをもつ学生集合とする．また，$P_X = \bigcup_{j \in S_X} P_j$ $(X \in \{F, L, T_f, T_\ell\})$ と略記する．

また，k_T は次のブロック開始時限で $k_T = n - |S_T \setminus P_{T_f}|$ である．ここでも加治屋，坂森ら [4] のように $\bar{k} < k_T$ と $k_T \leq \bar{k}$ に大別して考えるが，問題となるのは，$\bar{k} < k_T$ のときであり，$k_T \leq \bar{k}$ の場合の詳細は省略し，後に結果のみをまとめる．

同一パターンを連続させることで注意を要するところは，図4のように，あるパターンが前半・後半の境 $\bar{k}$ を跨ぐ位置に配置される可能性があることである．しかも，そのようなパターンの中には，前半・後半に固定される学生を同時に含む場合があり，そのパターンを $P_{\bar{k}} = P_F \cap P_L$ とする．このようなパターンは高々1つしかなく，もし2つ以上ある場合は，実行不可能な学生の固定をしているので，分枝を見切ることができる．また，前半・後半に固定される学生を同時に含むパターンがない場合（$P_F \cap P_L = \emptyset$）には，$S_{T_f} \neq \emptyset$ のとき $\max_{j \in S_{T_f}}\{|P_j \setminus S_{T_f}|\}$ を与えるパターン，$S_{T_f} = \emptyset$ のとき $\max_{j \in S_{T_\ell}}\{|P_j \setminus S_{T_\ell}|\}$ を与えるパターンを $P_{\bar{k}}$ とする．これは P_{T_f}（P_{T_ℓ}）のうち，図4のように後（前）半に割り込んでいる部分が最大のパターンを意味する．

$S_{T_f} \neq \emptyset$ のときに $g(T)$ を最大化するためには，パターン $P_{\bar{k}}$ を $\bar{k}$ を跨ぐ位置に，$|P_{\bar{k}} \setminus S_{T_f}|$ だけ後半に飛び出すような形で配置する．こうすることで，$g(T)$ の増分 $d(T)$ を最も大きくすることができる．

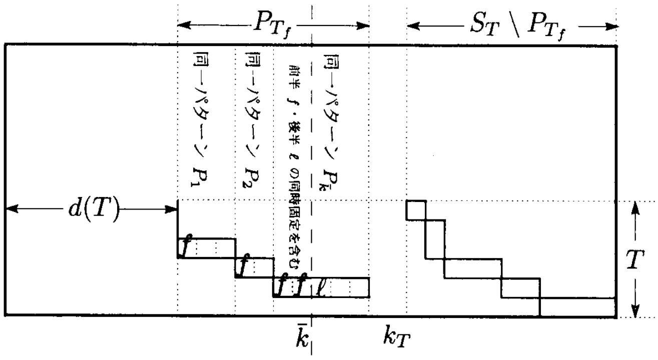

図 4: 同一パターンを並べて前半に固定する場合

さらに，後半に固定すべき学生 S_{T_ℓ} がいる場合は，余裕部分 $k_s = k_T - \bar{k}$ に後半に入るべき学生 $P_{T_\ell} \setminus (P_{\bar{k}} \setminus S_{T_\ell})$ がすべて収まる場合は特に考慮の必要はないが，収まらない場合は P_{T_ℓ} を配置してから，固定される学生 $P_{T_f} \cup P_{T_\ell}$ を並べた前に，固定のない学生を分割配置しなければならない．

以上のことをまとめると，加治屋・坂森ら [4] 同様，DP-LS において $d(T)$ だけを次のように変更すればよい．

- $k_T > \bar{k}$ のとき，
  - $S_{T_f} = \emptyset$ かつ $k_s \geq |P_{T_\ell}| - |P_{\bar{k}} \setminus S_{T_\ell}|$ のとき，$d(T) = k_T$.
  - $S_{T_f} \neq \emptyset$ かつ $k_s \geq |P_{T_\ell}| - |P_{\bar{k}} \setminus S_{T_\ell}|$ のとき，$d(T) = \bar{k} - |P_{T_f}| + \min\{|P_{\bar{k}} \setminus S_{T_f}|, k_s\}$.
  - $k_s < |P_{T_\ell}| - |P_{\bar{k}} \setminus S_{T_\ell}|$ のとき，$d(T) = k_T - |P_{T_f}| - |P_{T_\ell}|$.
- $k_T \leq \bar{k}$ のとき，$d(T) = k_T - |P_{T_f}| - |P_{T_\ell}|$.

同一パターンを連続させる LSBP を考えることで，実行不可能な分枝を見切り，無駄な固定も除去し，下界値を改善させることが期待できる．この他にも各 LSBP を解いた際に求まる実行可能解と下界値が一致したときも，分枝を見切ることができる．以上で，これまで課題となっていた事項が解決される．計算機実験等については，当日報告する予定である．

参考文献

[1] 加治屋他: MBP の DP 解法. OR'00 春,26-27.
[2] 加治屋他: MBP の下界値. OR'00 秋,26-27.
[3] 加治屋: MBP の解法 —. 防衛大修士論文 (2001).
[4] 加治屋, 坂森他: MBP の B&B. OR'01 春,204-205.