正規分布組合せ最適化問題

01007584　大阪工業大学　一森 哲男　ICHIMORI Tetsuo

1　はじめに

最小スパニングツリー問題や最短経路問題といった組合せ最適化問題では，グラフの辺の長さは定数と仮定されている．しかしながら，多くの応用では辺の長さは確率的と考えたほうが好ましい場合も結構多い．そこで，ここでは，辺の長さが平均と分散が既知の，互いに独立な正規分布従うと仮定した問題を考える．この問題を正規分布組合せ最適化問題とよぶ．ただし，この問題は古くから知られており，今では古典的な問題と言える．

ここで扱う問題のタイプは確率制約条件をもつ最適化問題である．従来からよく知られた手法を用いると，この問題は非線形な目的関数をもつ組合せ最適化問題に変換される．さらに，この非線形組合せ問題はひとつのパラメータをもつ，ふつうの組合せ最適化問題を解くことにより，最適解が得られる．ただし，パラメータをもつ組合せ最適化問題の最適解を見つけることは一般には難しい．なぜならば，パラメータの値により最適解が変わるからである．

幸いなことに，パラメータのすべての値に対する最適解を知る必要はない．必要なパラメータの値は，元になる非線形組合せ最適化問題の最適解から定まるただ一つの値だけを知れば十分である．しかしながら，このことは少し矛盾している．なぜならば，元の非線形組合せ最適化問題の最適解を知っていれば，何もすることがないからである．

結局のところ，著者の知る範囲では，本問題に対する効率的な解法は知られていないようである．しかしながら，これとよく似た状況は，分散最小化問題にも現れている．こちらの問題は実質的には分枝限定法であるが，効率的に解くことができている．この方法を区間分枝限定法と呼ぶことにするが，この方法を正規分布組合せ最適化問題に適用してみて，どのような結果になるかを観察してみる．

2　問題の説明

記号の説明からはじめる．$\mathcal{F}$ をある条件を満たす，集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の部分集合の族とする．よって，要素 $S\in\mathcal{F}$ は，集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の部分集合である．例えば，$\mathcal{F}$ をグラフ上のすべてのスパニングツリーの集合とすれば，S はその中の一つのスパニングツリーを表わす．また,, $\mathcal{F}$ をグラフ上のすべての s-t 経路の集合とすれば，S はその中の一つ s-t 経路を表わす．各要素 $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ には互いに独立な正規分布に従う確率変数 X_j で重み付られている．正規分布に従う各確率変数 X_j は平均 μ_j 分散 σ_j^2 を持つ．これらの平均と分散の値は既知とする．

我々の正規分布組合せ最適化問題は次のように定式化される．

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}_0) & \displaystyle\min_{S\in\mathcal{F}} & z \\ & \text{s.t.} & \Pr\left(\displaystyle\sum_{j\in S} X_j \le z\right) \ge \alpha.\end{array}$$

3 実験結果

数値実験を S がグラフのスパニングツリーの場合と s-t 経路の場合に対して行った．どちらも枝の重み，辺の長さは平均 m_j を 450 から 550 の一様乱数(整数)で与え，標準偏差 σ_j を (1)10 から 200, (2)10 から 190, (3)10 から 180, $\cdots$, (20)10 から 10, i.e., $\sigma_j = 10$ の 20 通りに設定した．

スパニングツリーの無向グラフでは，節点数を 30 とし，枝の数を完全グラフの約 70 パーセント(約 294)とした．表 1 の各行はそれぞれの標準偏差の設定の仕方に対応しており，各行の時間複雑度はふつうの最小スパニングツリー問題を解いた回数を 100 題の平均値で表示している．また，領域複雑度は記憶しておく必要のある，異なる区間のパラメータをもつ組合せ最適化問題の最大数で，100 題全体の最大値で表示している．最後の行では 100 題全体にわたり，分散が固定されスパニングツリーに含まれる枝の数も一定なので時間複雑度は 1 に，領域複雑度も 0 にすることができるが，ここではそのような洗練をプログラムに施していない．

一方，最短経路の有向グラフでは頂点数を 300 とし，各頂点の入出次数を 3 とする正規グラフとした．辺の数は 900 である．

表 1: 正規分布最小スパニングツリー

標準偏差の範囲	時間複雑度	領域複雑度
[10, 200]	9.760	4
[10, 190]	9.560	3
[10, 180]	9.540	3
[10, 170]	9.230	3
[10, 160]	9.070	3
[10, 150]	8.800	3
[10, 140]	8.870	4
[10, 130]	8.960	3
[10, 120]	8.930	3
[10, 110]	9.090	3
[10, 100]	9.090	3
[10, 90]	9.110	3
[10, 80]	8.950	3
[10, 70]	9.010	3
[10, 60]	8.850	2
[10, 50]	8.460	2
[10, 40]	8.600	2
[10, 30]	8.420	2
[10, 20]	8.010	2
[10, 10]	2.000	1

表 2: 正規分布最短経路

標準偏差の範囲	時間複雑度	領域複雑度
[10, 200]	7.370	2
[10, 190]	7.380	2
[10, 180]	7.360	2
[10, 170]	7.340	2
[10, 160]	7.300	2
[10, 150]	7.410	2
[10, 140]	7.330	2
[10, 130]	7.270	1
[10, 120]	7.340	2
[10, 110]	7.340	2
[10, 100]	7.240	1
[10, 90]	7.270	2
[10, 80]	7.270	1
[10, 70]	7.220	1
[10, 60]	7.200	2
[10, 50]	7.060	1
[10, 40]	6.880	1
[10, 30]	6.760	1
[10, 20]	5.940	1
[10, 10]	2.380	1

参考文献

[1] T. Ichimori, S. Shiode, H. Ishii and T. Nishida, Minimum spanning tree with normal variates as weights, *Journal of the Operations Research Soeiety of Japan*, **24**(1981), 61–66.

[2] 一森哲男, 加藤直樹, 分散最小化離散資源配分問題, **日本応用数理学会論文誌**, 8(1998), 389–404.