大規模区間AHP

01702180　静岡大学　　八巻直一　YAMAKI Naokazu
02004963　静岡大学　＊岡野智史　OKANO Satoshi

1　はじめに

本研究では主観や直感を含む意思決定の支援ツールとして,広く用いられているAHP(Analytic Hierarchy Process:階層化意思決定法)を,大規模な問題に対して集団で円滑に合意形成が行えるように改良した、新たなモデルの提案を目指す.
大規模な問題にAHPを適用したモデルとしては,八巻ら[1]による大規模AHPがある.また集団の意思決定にAHPを用いる試みは,Saatyをはじめ多くのモデルが提案されている.さらに,山田らによって提案された区間AHPを基に,八巻ら[3]によって不満関数という概念を導入した区間AHPなどがある.そして本稿では大規模区間AHPとして,大規模AHPと不満関数を用いた区間AHPを融合したモデルを提案する.

2　AHP

AHPは,1971年米国のピッツバーグ大学のT.L.Saaty氏が提唱した意思決定法のひとつである.これは計量化の難しい勘,直感,フィーリングによる部分が多いことを十分確認したうえで,それでも最大公約数的な判断をその中から見出そうとする試みで,一対比較ネットワークで説明することができる.ノードを代替案,エッジを両端のノード同士を一対比較した事を表すとすると,評価者は各代替案に対し全一対比較することにより,代替案間の重要度の比を測定し,重要度を推定する方法である.

3　大規模AHP

大規模AHPはAHPを大規模な問題に適用したモデルである.大規模な問題とは,多数の代替案と複数の評価者を想定した問題である.従来のAHPモデルでは代替案が多い場合,多くの問題が生じる.例えば代替案の全一対比較を行うため,一対比較ネットワークにおいて,各ノードはその他の全ノードと結ばれていなくてはならない.ノードの本数が一対比較の回数であり,代替案の数をnとしたときの一対比較の回数は$n(n-1)/2$となり,nが大きくなると一対比較の回数は爆発的に増加する.
大規模AHPは一対比較ネットワークにおいて,一対比較されないノード間や,複数の評価者によって同じノード間を一対比較する事を許したモデルである.大規模AHPでは代替案の重要度ベクトル$\tilde{w}$は以下の誤差最小化問題として与えられる.

$$\min \|A^T\tilde{w} - b\| \tag{1}$$

$$\tilde{w} = (AA^T + ee^t)^{-1}Ab + \alpha e \tag{2}$$

このときAはネットワークの接続を表す接続行列,bは一対比較値を対数変換したカットベクトル,eは全ての要素が1のベクトル,αは任意の実数である.また$\tilde{w}$は重要度wを対数変換した値である.

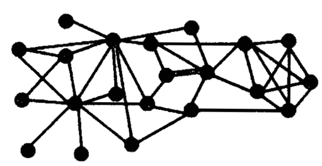

図1: 大規模AHPの一対比較ネットワーク

4　区間AHP

4.1　区間AHP

区間AHPはグループAHPの一つである.グループAHPではSaatyのモデルがよく知られている.Saatyの方法では集団一対比較値を話し合いや幾何平均により決定しているため,集団の一対比較値が各評価者の意思から大きく離れてしまう可能性があり,決定的な手法とは言えない.そこで山田ら[2]により,一対比

較値に区間値を用いることにより複数の評価者の合意形成を図るモデルとして区間 AHP が提案された.

4.2 不満関数を伴う区間 AHP

山田らの提案した区間 AHP は, 一対比較値に対する各評価者の提示区間が同じ区間を共有していれば合意形成として有効といえるが, 区間が同じ区間を共有していない場合においては, 明確な基準がなかった. この欠点を補う手法として Ryu により不満関数を用いた区間 AHP が提案された. 不満関数を用いた区間 AHP は各評価者の提示した区間値を基に以下の関数を用いて不満値を測定し, 不満値を最小とすることにより, 各評価者の不満が最小となるように合意形成するモデルである. 不満関数は次のような区分的 2 次関数 g で与えられている.

$$g(x|p,q)=\begin{cases} b(x-q+\beta)^2+aq\beta, & x\le p-q \\ a(x-p)^2, & p-q<x\le p+q \\ b(x-p-\beta)^2+aq\beta, & p+q\le x \end{cases} \quad (3)$$

ただし p は区間の中央値,q が区間の幅,$0 < a << b, 0 < q, \beta = (1-a/b)q$ である。関数 g の基本的な性質は次の通りである。

1 狭義凸であり,$x = p$ で最小値 $g(p|p,q) = 0$ をとる.

2 $p-q \le x \le p+q$ の範囲では小さな値をとり,$g(p \pm q|p,q) = \alpha q^2, x < p-q$ または $p;q < x$ では急激に大きな値をとる.

3 g は 2 階微分可能である.

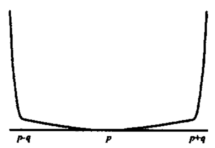

図 2: 不満関数

このように不満関数を導入することにより, 主張区間の意味付けを明確にし, 山田らの区間 AHP 法の欠点を補った.

5 大規模区間 AHP

八巻らは,Ryu の研究を発展させて, 大規模区間 AHP を提案した [3]. 大規模区間 AHP は 3 章と 4 章で紹介した AHP の枠組みを用いて, 大規模問題をグループで円滑に行う方法である.

評価者 k の項目 i と j の一対比較値 x_{ij} に対する主張区間を $(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})$ とする. このときの不満は $g(\tilde{x}_{ij}^{(k)}|p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})$ となる. したがって評価者全体の不満の平均 $G(b)$ は

$$G(b)=\frac{1}{|E|}\sum g(\tilde{x}_{ij}^{(l)}|p_{ij}^{(l)}, q_{ij}^{(l)}) \quad (4)$$

と与えられる.

次に各評価者が許容可能な不満の上限を u とすると, 不満の大きさが u 以下である区間は

$$\begin{array}{ll} p-\sqrt{u}q \le x \le p+\sqrt{u}q, & u \le 1 \\ p-q-\frac{1}{\alpha q}r \le x \le p+q+\frac{1}{\alpha q}r, & 1 < u \end{array} \quad (5)$$

となる. ただし $r = \sqrt{1+\alpha q^2(u-1)}-1$ である.

残差最小化モデルと不満最小化モデルを合成すれば, 不満関数を伴う大規模 AHP のモデルとなり, 以下のように提案できる.

$$\min f(\tilde{w}, b|u\theta) = \|A^T\tilde{w}-b\|^2+\theta G(b) \quad (6)$$

ただし,

$$g(\tilde{x}_{ij}^{(k)}|p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}) \le u, (i,j) \in K, k \le L.$$

このとき K は全代替案の集合,L は評価者の人数である.θ は正のパラメータであり小さな値をとる場合は集団の一対比較値の整合性を重視し, 大きな値をとる場合は集団の不満の最小化を重視することを表している.

参考文献

[1] 八巻 直一, 関谷 和之：複数の評価者を想定した大規模 AHP の提案と人事評価への適用, 日本オペレーションズリサーチ学会論文誌,Vol.40,405-420,1999

[2] 山田 善靖, 杉山 学, 八巻 直一：合意形成モデルを用いたグループ AHP, 日本オペレーションズリサーチ学会論文誌,Vol.42-2,236-243,1997

[3] 八巻 直一, 杉山 学, 劉 暁東, 山田 善靖：大規模問題に対する区間 AHP,2001 年度日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集,232-233,2001