一対比較における最適スケールに関する考察

01206633　松阪大学　佐藤祐司　SATO Yuji

1. はじめに

本研究のテーマは，一対比較に用いる最適スケールの探求である．階層化意思決定法(AHP)の一対比較に用いるスケールは，重要度や整合度(C.I.)に直接影響し，人間の感覚を如何にうまく捉えることができるかという観点から，これまでにさまざまなスケールが提案されている．しかしその有効性に関して理論的な評価を下すことは，適用対象が人間の主観的な価値判断であることから極めて困難である．これまでに物理実験などの実証研究も行われているが，AHP の適用対象に鑑みると，最適スケールの探求においては，現実的な問題に対する適用事例を基にした検証も不可欠である．本稿では，一対比較に用いるスケールとして表1に挙げたものを分析の対象とし，意思決定主体のバイアスがかかったデータ(以下，データ)を検証材料とする．ただしデータの制約から，一対比較行列のサイズは4×4のみで，データ数は1409である．

2. スケールの定義

一対比較に用いるスケールは，評価項目に対する対比較の結果を，レシプロカルな一対比較値に変換する関数として捉えることができる．評価項目 i と j の比較結果を $x_{ij} \in \{-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$ $(x_{ij} + x_{ji} = 0)$，一対比較値を a_{ij} とすると，$f(x_{ij}) \cdot f(x_{ji}) = 1$ を満たす単調増加関数 $f : x_{ij} \to a_{ij}$ として次のように定義される．

表1:スケールの定義

		$f : x_{ij} \to a_{ij}$ $(x_{ij} \geqq 0)$	パラメータ	a_{ij} $(k=8)$	
線型スケール		$f_L(x_{ij};c) = c\,x_{ij} + 1$	$c = 1$ $c = 0.5$ $c = 2$	$\{1, \ldots, 9\}$ $\{1, \ldots, 5\}$ $\{1, \ldots, 17\}$	(1)
非線形多項式スケール	未標準化	$f_{Nn}(x_{ij};q_n) = (x_{ij} + 1)^{q_n}$	$q_s = 0.5$ $q_s = 2$	$\{1, \ldots, 3\}$ $\{1, \ldots, 81\}$	(2)
	標準化	$f_{Ns}(x_{ij};q_s, r_{q_s}) = r_{q_s} x_{ij}^{q_s} + 1$	$q_s = 0.5$, $r_{0.5} = 2.2113$ $q_s = 2$, $r_2 = 0.1875$	$\{1, \ldots, 7\}$ $\{1, \ldots, 13\}$	(3)
指数スケール		$f_P(x_{ij};m) = m^{x_{ij}}$	$m = 2$ $m^* = 1.3945$	$\{1, \ldots, 256\}$ $\{1, \ldots, 14.3\}$	(4)
対数スケール		$f_G(x_{ij};a) = \log_a(x_{ij} + 1) + 1$	$a = e$ $a^* = 1.4448$	$\{1, \ldots, 3.20\}$ $\{1, \ldots, 6.97\}$	(5)

(1)において，Saaty のスケールは c=1, k=8 の場合，Aupetit, Genest のスケールは c=1, k=12 の場合，Harker, Vargas のスケールは c=0.5, k=8 の場合にそれぞれ対応する．また(2)において，Harker, Vargas の無理関数スケールは q_n=0.5, k=8 の場合，2次関数スケールは q_n=2, k=8 の場合にそれぞれ対応する．

(3)，(4)，(5)を定義する際には，パラメータ q_s, r_{q_s}, m, a の決め方が一対比較値 a_{ij} に大きな影響を与える．本稿では各スケールの平均的な評価が Saaty の線型スケールと等しくなるように，次式を満たす値を用いる．

$$\int_0^8 f_{*}(x_{ij};\#)\,dx_{ij} = \int_0^8 f_L(x_{ij};1)\,dx_{ij} \tag{6}$$

(6)より，q_s=0.5 のとき $r_{0.5}$=2.2113, q_s=2 のとき r_2=0.1875, m=1.3945, a=1.4448 が得られる．また本稿では，すべてのスケールに関して k=8 とする．

3. 検証内容および結果

3.1 C.I.の値: C.I.は一対比較における判断の整合性を計る尺度として用いられる．この値がある一定値(通常，0.1)を超えると，その一対比較行列は整合性のない判断として再検討の対象となる．したがって AHP を実行する際には，C.I.の値が 0 に近い値に偏って分布するスケールが実用上望ましい．本稿では，データを基に(1)～(5)のスケールを用いて一対比較行列を構成し，それぞれの C.I.($\mathrm{CI}_{L(\#)}$, $\mathrm{CI}_{Nn(\#)}$, $\mathrm{CI}_{Ns(\#)}$, $\mathrm{CI}_{P(\#)}$, $\mathrm{CI}_{G(\#)}$)の値を比較した．しかし，$\{-8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8\}$から一様分布にしたがって抽出された$\{x_{ij}\}$ $(i, j : 1, \ldots, 4$；10000組)を基に，(1)～(5)を用いて構成した一対比較行列の C.I.は異なる分布をする．したがって，単に C.I.の大小を比較するのは公平ではない．そこで，各スケールごとに 10000 個の C.I.を昇べきの順にみたときの，上位 1, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25%の C.I.を，比較の基準となる C.I.(以下，基準点)として設定し，この基準点を基に，1409 個のデータの C.I.がどのように分布しているかを比較した．

表2に示したように，同じデータを $f_{Ns}(x_{ij};2,\ 0.1875)$, $f_P(x_{ij};m)$, $f_P(x_{ij};m^*)$を用いて一対比較行列を構成した場合，他のスケールと比較して C.I.が 0 に近い値に偏って分布していることが判る．

表 2:C.I.の分布

基準点	$CI_{L(1)}$	$CI_{L(0.5)}$	$CI_{L(2)}$	$CI_{Nn(0.5)}$	$CI_{Nn(2)}$	$CI_{Ns(0.5)}$	$CI_{Ns(2)}$	$CI_{P(2)}$	$CI_{P(m^*)}$	$CI_{G(e)}$	$CI_{G(a^*)}$
1%	21.43%	*21.36%*	21.65%	*21.36%*	*21.36%*	21.72%	**30.59%**	26.90%	26.90%	21.50%	21.50%
3%	30.52%	*30.16%*	32.51%	30.52%	30.38%	32.86%	36.27%	**38.96%**	**38.96%**	32.29%	32.65%
5%	42.51%	43.58%	43.22%	42.65%	43.44%	41.73%	46.84%	**50.89%**	**50.89%**	*39.60%*	41.45%
7%	46.63%	47.69%	46.63%	45.56%	45.56%	45.71%	**51.88%**	**51.88%**	**51.88%**	45.92%	*45.00%*
10%	55.86%	54.15%	53.51%	55.57%	55.36%	54.22%	57.27%	**61.75%**	**61.75%**	*51.24%*	54.08%
15%	67.35%	66.64%	62.60%	63.09%	67.85%	59.47%	68.13%	67.92%	**68.56%**	61.82%	*59.33%*
20%	73.03%	72.75%	70.97%	72.11%	73.10%	*67.85%*	74.02%	74.10%	**74.10%**	70.26%	67.92%
25%	78.21%	77.22%	77.86%	75.51%	78.57%	75.94%	78.71%	79.13%	**78.57%**	*74.31%*	75.73%
100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

3.2 判別性能: 一対比較値 a_{ij} の取り得る値の範囲を縮小していくと, C.I.の値は 0 に収束するが, 一方で評価項目間の重要度の差もなくなる. AHP の目的のひとつには, 最も重要性が高い項目を他の項目から判別することもあることから, a_{ij} がある程度分布した場合の, この判別性能も重要な検証項目である. 本稿では Frobenius 根に対応する固有ベクトルの max 成分と 2^{nd}-max 成分の差を $v_{\bullet(\#)}$ とし, AHP の標準である Saaty の線型スケールで計った $v_{L(1)}$との差を評価した.

表 3 に示したように, $f_L(x_{ij};1)$ との比較においては, $f_L(x_{ij};2)$, $f_{Nn}(x_{ij};2)$, $f_P(x_{ij};2)$ の判別性能が高いことが判る.

表 3:判別性能

$v_{L(1)}-v_{\bullet(*)}$	$v_{L(1)}$	$v_{L(0.5)}$	$v_{L(2)}$	$v_{Nn(0.5)}$	$v_{Nn(2)}$	$v_{Ns(0.5)}$	$v_{Ns(2)}$	$v_{P(2)}$	$v_{P(m^*)}$	$v_{G(e)}$	$v_{G(a^*)}$
−	-	1.21%	**82.11%**	*0.85%*	**81.69%**	**42.02%**	35.20%	**78.28%**	**49.18%**	1.63%	**43.93%**
0	-	16.82%	16.82%	16.82%	16.82%	16.82%	16.75%	16.82%	17.53%	16.82%	16.82%
+	-	**81.97%**	*1.06%*	**82.33%**	1.49%	41.16%	**48.05%**	4.90%	33.29%	**81.55%**	39.25%

3.3 重要度の序列変動: 一対比較値 a_{ij} の取り得る値の範囲を拡大/縮小すると, Frobenius 根の値のみならず, それに対応する固有ベクトルの向きが変動し, 評価項目の重要度の序列を覆してしまうことがある. とくに重要度が高い評価項目間での序列変動があった場合, 得られた重要度の信頼性は低い. したがって一対比較に用いるスケールには, この序列変動に関してロバストであることが望まれる. 本稿では, 各スケールを定義するパラメータを下に示した範囲で変動させ, そのときの序列変動の有無を調べた.

表 4 に示したように, とくに C.I.の値が良好なデータにおいて $f_P(x_{ij};m)$ と $f_P(x_{ij};m^*)$ は序列変動の発生率が低い.

表 4:序列変動

f	$f_L(x_{ij};c)$			$f_{Nn}(x_{ij};q_n)$	
基準点	$CI_{L(1)}$	$CI_{L(0.5)}$	$CI_{L(2)}$	$CI_{Nn(0.5)}$	$CI_{Nn(2)}$
1%	0 : **0.00%**	0 : **0.00%**	0 : **0.00%**	1 : 0.33%	1 : 0.33%
3%	7 : 1.63%	6 : 1.41%	9 : 1.97%	3 : 0.70%	3 : 0.70%
5%	9 : 1.50%	10 : 1.63%	9 : 1.48%	4 : 0.67%	4 : 0.65%
7%	12 : 1.87%	10 : 1.49%	14 : 2.13%	6 : 0.93%	6 : 0.93%
10%	18 : 2.32%	20 : 2.62%	18 : 2.39%	9 : 1.15%	9 : 1.15%
15%	27 : 2.85%	23 : 2.45%	27 : 3.06%	12 : 1.35%	11 : **1.15%**
20%	31 : 3.05%	33 : 3.22%	30 : 3.00%	13 : 1.28%	13 : **1.26%**
25%	41 : 3.85%	47 : 4.32%	68 : 6.20%	21 : 1.97%	19 : **1.72%**
100%	134 : 9.51%	134 : 9.51%	134 : 9.51%	88 : 6.25%	88 : 6.25%

f	$f_{Ns}(x_{ij};q_s)$		$f_P(x_{ij};m)$		$f_G(x_{ij};a)$	
基準点	$CI_{Ns(0.5)}$	$CI_{Ns(2)}$	$CI_{P(2)}$	$CI_{P(m^*)}$	$CI_{G(e)}$	$CI_{G(a^*)}$
1%	4 : 1.31%	3 : 0.70%	0 : **0.00%**	0 : **0.00%**	11 : *3.63%*	11 : *3.63%*
3%	32 : 6.91%	23 : 4.50%	3 : **0.55%**	3 : **0.55%**	38 : *8.35%*	38 : 8.26%
5%	44 : 7.48%	45 : 6.82%	4 : **0.56%**	4 : **0.56%**	49 : 8.78%	55 : *9.42%*
7%	47 : 7.30%	73 : 9.99%	4 : **0.55%**	4 : **0.55%**	57 : 8.81%	70 : *11.0%*
10%	58 : 7.59%	109 : *13.51%*	10 : 1.15%	10 : **1.07%**	78 : 10.8%	79 : 10.4%
15%	87 : 10.38%	134 : *13.96%*	12 : 1.25%	14 : 1.38%	83 : 9.53%	80 : 9.57%
20%	111 : 11.61%	165 : *15.82%*	19 : 1.82%	19 : 1.72%	87 : 8.79%	85 : 8.88%
25%	139 : 12.99%	179 : *16.14%*	23 : 2.06%	21 : 1.76%	92 : 8.79%	91 : 8.53%
100%	264 : *18.74%*	264 : *18.74%*	43 : **3.05%**	43 : **3.05%**	222 : 15.8%	222 : 15.8%

パラメータの変動範囲

$$
\begin{cases}
c: 0 \leqq c \leqq 10 \\
q_n: 0.3 \leqq q_n \leqq 4 \\
q_s: 0 \leqq q_s \leqq 5 \\
m: 1 \leqq m \leqq 3 \\
a: 1.0003 \leqq a \leqq 9
\end{cases}
$$