

## ボロノイ図とパレート最適配置

01009480 筑波大学社会工学系 大澤義明

## 1. はじめに

現実の施設配置計画では、複数評価指標を基に総合的に判断する必要がある。しかし、パレート最適集合やトレードオフ曲線を明示的に取り上げた既存研究は少ない。本稿では、迷惑施設及び便益施設のパレート最適配置を求める、ボロノイ図を利用した解法を紹介する。

## 2. ミニサム対ミニマックス

対象領域  $\Omega$  及び  $m$  点の居住地  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$  が与えられたとしよう。マクシミン施設配置とは、最も近い居住地から最も遠い  $\Omega$  上の点を求める：

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} F(\mathbf{x}) \equiv \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|. \quad (1)$$

この最適点を  $\mathbf{a}^*$  で表し、アンチセンターと呼ぼう。さらに、 $n$  点の施設需要点  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  が与えられたとしよう。ミニマックス施設配置とは、最も遠い利用者までの距離を最小となる地点を見つける：

$$\min_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) \equiv \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{q}_i\|. \quad (2)$$

最適点はセンターと呼ばれ、 $\mathbf{c}^*$  で表す。

この二つの目的関数  $F(\mathbf{x})$  及び  $G(\mathbf{x})$  に関する対象領域  $\Omega$  上のパレート集合を求める解法として、次の方法がある：Ohsawa(2000) 参照。

1.  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$  に関して最近隣ボロノイ図、 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  に対し最遠点ボロノイ図を作る。
2. 基準空間にて、最近隣ボロノイ辺、最遠点ボロノイ辺、対象領域  $\Omega$  境界辺の和集合に対応する評価値をプロットし、その下側包絡線を求める。
3. この下側包絡線に対応する集合（パレート最適集合）を地理空間にて求める。

計算量は、 $O(mn \log mn)$  となる。岡山県内の10市（市役所の位置を中心）に対するパレート最適集合を図1に示す。この場合、 $m = n = 10$  及び  $\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i$  とし導出した。

## 3. マクシミン対ミニマックス (二乗距離)

$n$  点の施設需要点  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  が与えられたとしよう。移動費用が直線距離の二乗に比例するものとする。ミニサム施設配置では、利用者からの総費用が最も小さくなる地点を特定する：

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} H(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{q}_i\|^2. \quad (3)$$

最適点は重心と一致し、 $\mathbf{g}^*$  で表す。一方、ミニマックス施設配置は、数学的に(2)と等価である。

目的関数  $H(\mathbf{x})$  及び  $G(\mathbf{x})$  に関するパレート集合を求める解法として：Ohsawa(1999) 参照。

1.  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  に関して最遠点ボロノイ図を描く。重心  $\mathbf{g}^*$  を求める。
2. 重心  $\mathbf{g}^*$  とそれを含む最遠点ボロノイ領域の母点との交点を求め、 $\mathbf{q}_0$  とする。
3. センター  $\mathbf{c}^*$  から  $\mathbf{q}_0$  へ向かう最遠点ボロノイ辺ネットワークと、重心  $\mathbf{g}^*$  と  $\mathbf{q}_0$  とを結ぶ線分とがパレート最適集合となる。

計算量は  $O(n \log n)$  となる。岡山県市町村分布に対するパレート最適集合を図2に示す。

## 謝辞

卒業論文から親身にご指導頂いた腰塚武志先生、通称グラフゼミにて研究の厳しさを教えて頂いた室田一雄先生、特別研究員としてお世話になった伏見正則先生、そして、腰塚研究室後輩であり兄弟のような生活を一緒に過ごした栗田治先生、古藤浩先生へ、文献賞受賞にあたり記して感謝します。

## 参考文献

- [1] Ohsawa, Y. and A. Imai (1997): Degree of locational freedom in a single facility minimax location model, *Location Science*, 5, 29-45.
- [2] Ohsawa, Y. (1999): A geometric solution for quadratic bicriteria location models, *European Journal of Operational Research*, 114, 166-174.
- [3] Ohsawa, Y. (2000): Bicriteria Euclidean location associated with maximin and minimax criteria, *Naval Research Logistics*, 47, 581-592.

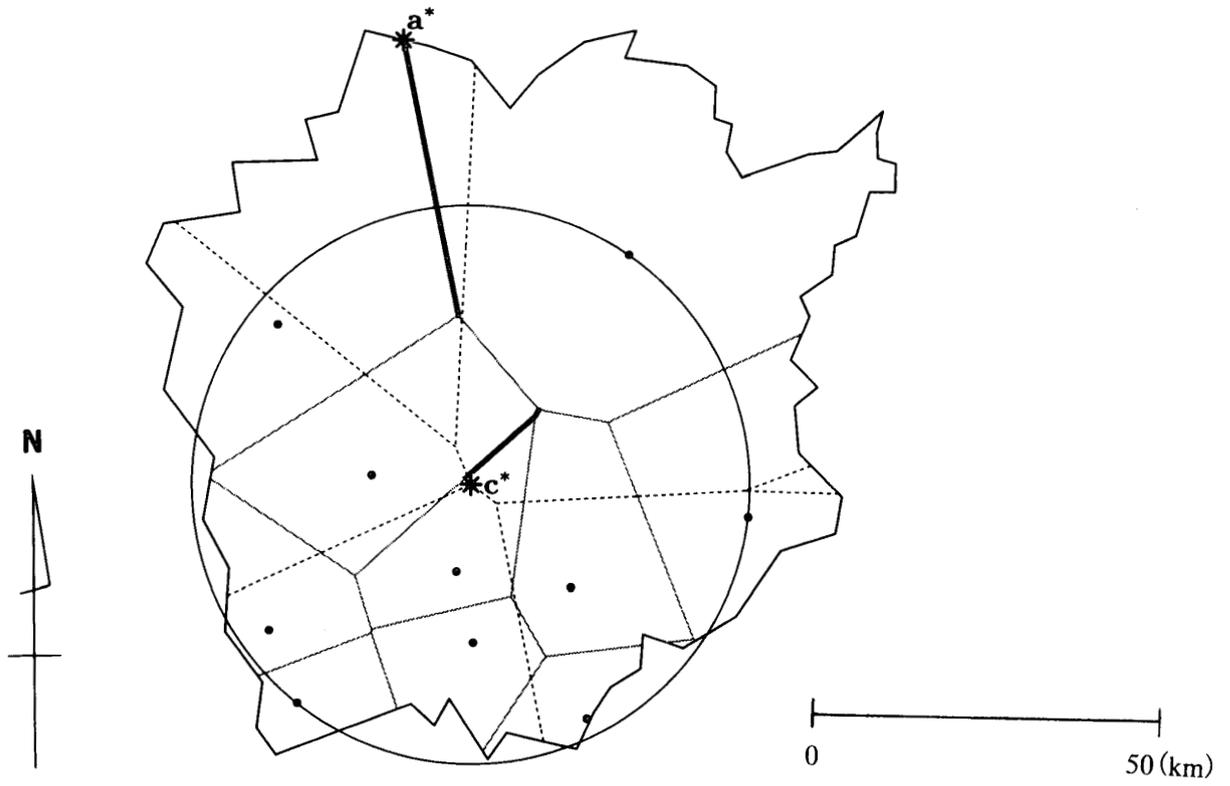


図 1: 岡山県 10 市とミニサム対ミニマックスのパレート最適集合

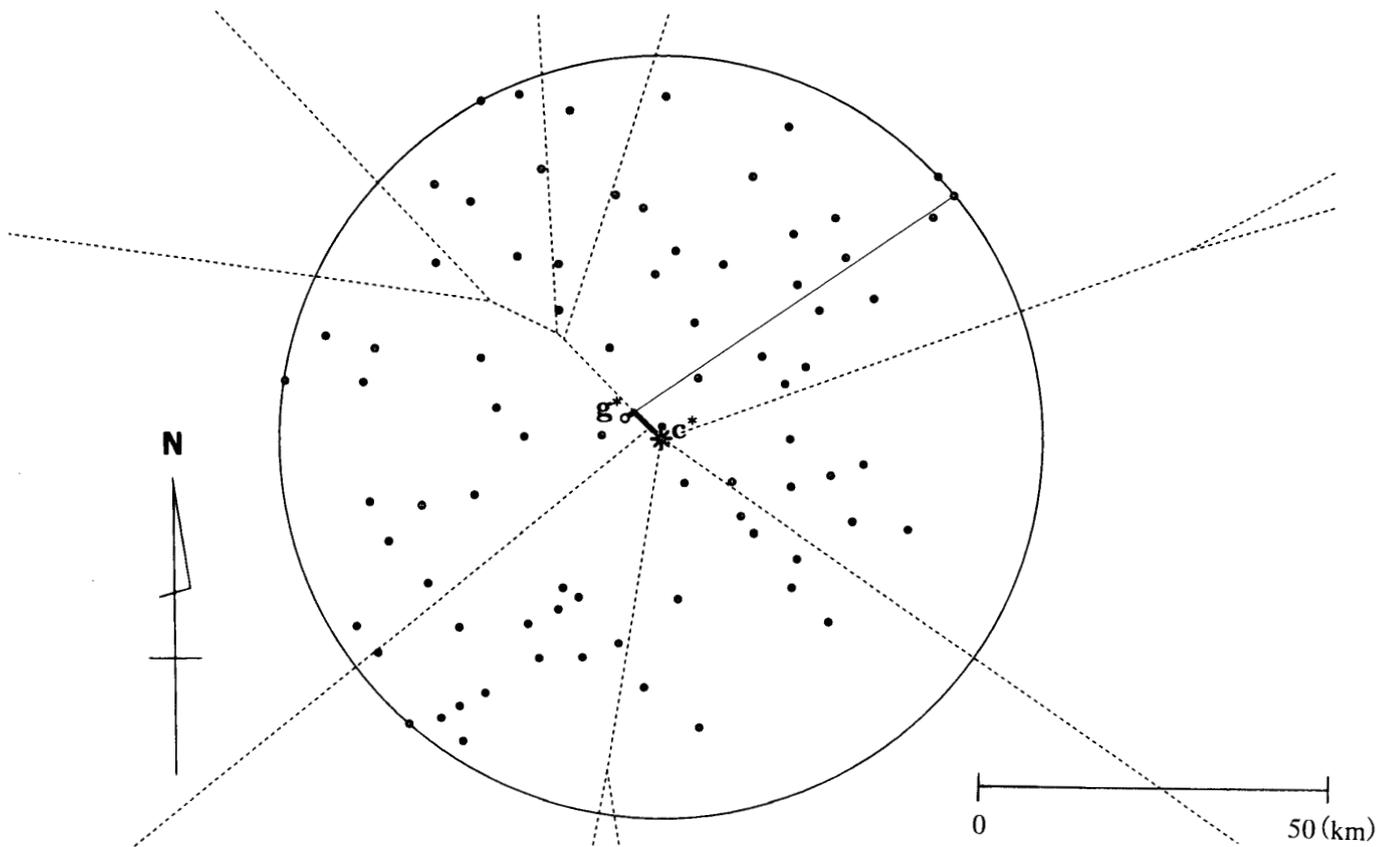


図 2: 岡山県内市町村分布とマクシミン対ミニマックスのパレート最適集合