目標価値の分割を考慮した資源配分ゲーム

防衛大学校　02103560　小牧隆志*　KOMAKI Takashi
01504810　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke
01000890　飯田耕司　IIDA Koji
01110110　小宮　享　KOMIYA Toru

1．はじめに

本報告は，複数のプレイヤーが複数の投資先に資源を投入して，最大限の利益を獲得しようとするゲームを取り扱う．捜索理論の分野ではJ.S.Croucher[1]が，複数の地点に隠された価値を発見しようとする捜索者と，それを阻止しようとする妨害者との2人ゼロ和ゲームを考えた．さらにV.J.Baston and A.Y.Garnaev[2]は，Croucherのモデルに資源投入コストを加味したゲームを考えた．ここでは，2人の捜索者が価値を取得しようとする同種のゲームを考え，両プレイヤーが同時に同じ価値を発見した場合は，その全体もしくは一部を両者の間で分割しなければならないとする点でプレイヤーが部分的に対立するモデルを取り扱う．

2．モデルの前提

次のような2人のプレイヤー A，Bが参加するゲームを考える．

(1) 捜索空間は離散的なセル空間$K=\{1,\cdots,n\}$からなり，それぞれのセルiに正の価値υ_iが隠されている．

(2) A，Bはそれぞれが所持する総捜索資源量X, Yを各セルに任意に分割して投入し，価値の発見に努める．Aがセルiに投入する捜索資源をx_iとするとき，$x=(x_1,\cdots;x_n)$はAの戦略である．同様に$y=(y_1,\cdots;y_n)$をBの戦略とする．

(3) Aがセルiに捜索資源x_iを投入したときに価値υ_iを発見する確率は$f_i(x_i)$である．同様にBの捜索資源y_iによる発見確率を$g_i(y_i)$とする．関数$f_i(x_i)$, $g_i(y_i)$はA，B両者には既知であるものとする．

(4) プレイヤー A，Bのいずれか一方が価値を発見した場合は発見者はそれを独占できる．A，B共に発見した場合は，γ_{Ai}, $\gamma_{Bi}\geqq 0$, $\gamma_{Ai}+\gamma_{Bi}\leqq 1$である分割係数により，Aは$\gamma_{Ai}\cdot\upsilon_i$を取得し，Bは$\gamma_{Bi}\cdot\upsilon_i$を取得するものとする．

(5) 問題を簡単にするため，関数$f_i(x_i)$, $g_i(y_i)$を以下で与えられるとして議論を進める．

$$f_i(x_i)=p_i(1-\exp(-\lambda_i x_i)),\quad ただし p_i,\ \lambda_i は 0<p_i\leqq 1,\ \lambda_i>0 の係数,$$
$$g_i(y_i)=q_i(1-\exp(-\mu_i y_i)),\quad ただし q_i,\ \mu_i は 0<q_i\leqq 1,\ \mu_i>0 の係数.$$

以上の前提よりAがセルiに捜索資源x_iを投入し，Bが捜索資源y_iを投入した場合，セルiにおけるA及びBの期待利得$EA_i(x_i,y_i)$, $EB_i(x_i,y_i)$は以下で計算できる．

$$EA_i(x_i,y_i)=\upsilon_i f_i(x_i)\{1-\eta_{Ai}g_i(y_i)\},\quad EB_i(x_i,y_i)=\upsilon_i g_i(y_i)\{1-\eta_{Bi}f_i(x_i)\}. \tag{1}$$

ただし，$\eta_{Ai}=1-\gamma_{Ai}$, $\eta_{Bi}=1-\gamma_{Bi}$である．プレイヤー A，Bは以下で与えられるそれぞれの総期待利得$EA(x,y)$, $EB(x,y)$を大きくするような戦略を採ろうとする．

$$EA(x,y)=\sum_{i=1}^{n} EA_i(x_i,y_i),\quad EB(x,y)=\sum_{i=1}^{n} EB_i(x_i,y_i)\ .$$

ただし，x, yの実行可能領域は，$x_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n}x_i\leq X$, $y_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n}y_i\leq Y$ で与えられる．

3．最適戦略

A , B の期待利得 $EA(x,y)$, $EB(x,y)$は x, y についての狭義凹関数であり，実行可能領域は凸であるので、ゲームの解は A , B ともに純粋戦略となる．この最適純粋戦略 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$, $y^*=(y_1^*,\cdots,y_n^*)$ は新たに導入した Lagrange 乗数ω,ν (>0)の連続関数で表され，次式より導出できる．$y_i^*(\omega,\nu)$ については，$x_i^*(\omega,\nu)$の式においてωとν，λ_iとμ_i，p_iとq_i，η_{Ai}とη_{Bi}，W_xとW_yを置き換えたものとなるが，紙面の都合で記載を省く．

$$Z(\omega,\nu)=\{i\in K \mid \upsilon_i\lambda_i p_i \le \omega, \upsilon_i\mu_i q_i\},$$

$$W_x(\omega,\nu)=\left\{i\in K \mid \upsilon_i\lambda_i p_i > \omega, \upsilon_i\mu_i q_i\{1-\eta_{B_i}(1-\frac{\omega}{\upsilon_i\lambda_i p_i})\}\le \nu\right\},$$

$$W_y(\omega,\nu)=\left\{i\in K \mid \upsilon_i\mu_i q_i > \nu, \upsilon_i\lambda_i p_i\{1-\eta_{A_i}(1-\frac{\nu}{\upsilon_i\mu_i q_i})\}\le \omega\right\},$$

$$Q(\omega,\nu)=Z(\omega,\nu)^c \cup W_x(\omega,\nu)^c \cup W_y(\omega,\nu)^c$$

とすると，$x_i^*(\omega,\nu)$は次式で表される．

$$x_i^*(\omega,\nu)=\begin{cases} 0 & \textit{for } i\in Z(\omega,\nu)\cup W_y(\omega,\nu) \\ \dfrac{1}{\lambda_i}\log\dfrac{\upsilon_i\lambda_i p_i}{\omega} & \textit{for } i\in W_x(\omega,\nu) \\ \dfrac{1}{\lambda_i}\log\dfrac{2k_1}{\sqrt{k_2{}^2+4k_1k_3}-k_2} & \textit{for } i\in Q(\omega,\nu), 1>\eta_{A_i}q_i \textit{ and } \eta_{B_i}>0 \\ \dfrac{1}{\lambda_i}\log\dfrac{k_2}{k_3} & \textit{for } i\in Q(\omega,\nu), 1=\eta_{A_i}q_i \textit{ or } \eta_{B_i}=0, \end{cases}$$

$$k_1=\upsilon_i\lambda_i\mu_i p_i{}^2(1-\eta_{A_i}q_i)\eta_{B_i},$$
$$k_2=\upsilon_i\lambda_i\mu_i p_i(1-\eta_{A_i}q_i)(1-\eta_{B_i}p_i)+p_i\lambda_i\eta_{A_i}\nu-p_i\mu_i\eta_{B_i}\omega,$$
$$k_3=\omega\mu_i(1-\eta_{B_i}p_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^*(\omega,\nu)=X, \quad \sum_{i=1}^{n}y_i^*(\omega,\nu)=Y. \tag{2}$$

式(2)の連立方程式を解くことにより，最適な Lagrange 乗数ω,ν及び最適純粋戦略 x^*, y^* が求まるが，数値計算では，Newton 法と２分法を適用して解いた．

4．数値例

紙面の関係上，数値例については発表会当日紹介する．

参考文献

[1] J.S.Croucher , Application of the Fundamental Theorem of Games to an Example Concerning Antiballistic Missile Defense, *Nav. Res. Logistics Quart.* , Vol.22 (1975), 197-203.

[2] V.J.Baston and A.Y.Garnaev , A Search Game with a Protector , *Nav. Res. Logistics* ,Vol.47 (2000), 85-96.

[3] T.Ibaraki and N.Katoh , *Resource Allocation Problems:Algorithmic Approaches*, The MIT Press (1988).

[4] A.Y.Garnaev , *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag (2000).