A New Index of Power for a Voting Game with Many Choices

01401144 関西大学　中井暉久　NAKAI Teruhisa

1. はじめに

さまざまな投票方式における各 player の影響力の大きさを示す指数が協力ゲームの枠組みの中で、いくつか提案されている。Shapley－Shubik 指数、Banzhaf 指数、Deegan－Packle 指数などである。これらは2選択肢間の選択に関する投票を扱ったものである。最近 Bolger によって多選択肢投票ゲームに関する指数が提案されているが、これは Shapley 値に基礎を置いていて、重み付き投票方式には適用できない。本論分では重み付き投票方式にも対応できるやり方で多選択肢投票ゲームを定式化し、新しい投票力指数をその背景をなす公理系と共に提案するものである。基本的には Deegan－Packle 指数に似た理論構成となっているが特徴的な点はゲームそのものの定義の仕方が異なっている、すなわち一つの提携が勝利提携となるかどうかは、その提携のみで決まるのではなく、他の提携の様態に依存して決まる点である。そのことにより、特性関数がベクトル関数で表示される。

2. 多選択肢投票ゲーム

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ ：投票者集合

$R=\{1,2,\cdots,r\}$ ：選択肢集合

各投票者は自分の支持するただ1つの選択肢に投票するものとする。

$C=\{C(1),\cdots,C(r)\}$ ：N の分割

$C(j)$ ：選択肢 j を支持する投票者の集合（提携）

$W(C)$ ：分割 C のもとでの勝利提携(WC)

WC をどう定義するかによってさまざまな投票方式を生む。WC の満たすべき条件

(i) $C(j)=N \Rightarrow C(j)=W(C)$

(ii) 単調性：$W(C)=C(j)$ とする。

新しい分割 $C'=\{C'(1),\cdots,C'(r)\}$ ただし $C'(j)\supset C(j)$, $C'(k)\subseteq C(k)$ for ${}^\forall k(\neq j)$ に対し $C'(j)=W(C')$ である。

さて分割 C に対し、ベクトル関数

$v(C)=\{v_1(C),\cdots,v_r(C)\}$

$$v_j(C)=\begin{cases}1 & if \quad C(j)=W(C)\\ 0 & if \quad C(j)\neq W(C)\end{cases} \qquad (1)$$

を特性関数といい、(N,R,v) を多選択肢投票ゲームという。

定義1：分割 $C=\{C(1),\cdots,C(r)\}$ において、

WC $C(j)$ が最小勝利提携(MWC)であるとは、${}^\forall h(\in C(j))$ に対し、ある選択肢 $l(\neq j)$ が存在して、

分割 $\tilde{C}=\{\tilde{C}(1),\cdots,\tilde{C}(r)\}$　ただし

$\tilde{C}(j)=C(j)-\{h\}$, $\tilde{C}(l)=C(l)\cup\{h\}$

$\tilde{C}(k)=C(k)\quad(k\neq j,l)$

に対し $\tilde{C}(j)\neq W(\tilde{C})$ である。

WC $C(j)$ から不要な投票者を除いて得られる MWC を、$C(j)$ から生成された MWC といい、$I[C(j)]$ と表す。

$W_v(C)$ ：ゲーム v のもとでの分割 C に対する WC

$M_v(C)$ ：ゲーム v のもとでの分割 C に対する MWC

$\Gamma(v)$ ：ゲーム v における MWC をもつ分割の集合

$\Gamma_i(v)$ ：ゲーム v における投票者 i を含んだ MWC をもつ分割の集合

3. 影響力指数

影響力指数導入にあたっての原則

(a) MWC のみが指数に影響する

(b) MWC をもったすべての分割が等確率で形成

される。

(c) 1つの分割のもとでは、MWC のみが利得1を得、他の提携の利得は0である。

(d) 1つの MWC の中では、共同利得1を全メンバーで等配分する。

(e) 指数は各投票者の期待利得である。

以上の原則のもとで、player i の影響力指数 $\rho_i(v)$ は次のように定義される。

$$\rho_i(v)=\frac{1}{|\Gamma(v)|}\sum_{C\in\Gamma_i(v)}\frac{1}{|C(\beta_i)|} \qquad (2)$$

ただし、β_i ：投票者 i の支持する選択肢

$|A|$ ：集合Aの要素数

4. 公理系

σ を N 上の任意の順列とする。

分割 $C=\{C(1),\cdots,C(r)\}$ に対し、分割 $\sigma^{-1}(C)$ を

$\sigma^{-1}(C)=\{\sigma_1^{-1}(C),\cdots,\sigma_r^{-1}(C)\}$,

$\sigma_j^{-1}(C)=\{i\,|\,\sigma(i)\in C(j)\}$ とおく。

定義2：新しいゲーム σv を次のように定義する

$$(\sigma v)(C)=\{(\sigma v)_1(C),\cdots,(\sigma v)_r(C)\}$$

$$(\sigma v)_j(C)=v_j\left(\sigma^{-1}(C)\right)$$

$$=\begin{cases}1 & if\ \sigma_j^{-1}(C)=W\left(\sigma^{-1}(C)\right)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

定義3：2つのゲーム v と w が mergeable である $\Longleftrightarrow \Gamma(v)\cap\Gamma(w)=\phi$

定義4：v と w が mergeable の時、結合ゲーム $v\vee w$ を次のように定義する。

$$(v\vee w)(C)=\{(v\vee w)_1(C),\cdots,(v\vee w)_r(C)\}$$

$$(v\vee w)_j(C)=\begin{cases}1 & if\ C(j)=W_{v\vee w}(C)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$W_{v\vee w}(C)=\begin{cases}C(j) & if\ \ W_v(C)=C(j)\\ C(k) & if\ \ W_w(C)=C(k)\end{cases}$$

補題1：v と w が mergeable であるとき

(i) $\Gamma(v\vee w)=\Gamma(v)+\Gamma(w)$

(ii) $\Gamma_i(v\vee w)=\Gamma_i(v)+\Gamma_i(w) \qquad \forall i$

いま集合 $L_v=\{M_v(C)\,|\,C\in\Gamma(v)\}$ の全ての要素に番号をふって $M_v^1,\cdots,M_v^m$ とする。

定義5：ゲーム v の singleton game $v^k(k=1,\cdots,m)$ を次のように定義する。

$$v^k(C)=\{v_1^k(C),\cdots,v_r^k(C)\}$$

$$v_j^k(C)=\begin{cases}1 & if\ C(j)=W_v(C),\ k=l\\ & \quad I[W_v(C)]=M_v^l\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

補題2：(i) $v^1,\cdots,v^m$ は mergeable である

(ii) $v=v^1\vee v^2\vee\cdots\vee v^m$

補題3：$\sigma v^k=v^k \quad (k=1,\cdots,m)$

$\pi(v)=\{\pi_1(v),\cdots,\pi_n(v)\}$ をゲーム v に対して定義されたn次元ベクトルとする

公理1：$\pi_i(v)=0 \Leftrightarrow \Gamma_i(v)=\phi$

公理2：N上の任意の順列 σ に対し

$$\pi_{\sigma(i)}(\sigma v)=\pi_i(v) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

公理3：$\sum_{i=1}^{n}\pi_i(v)=1$

公理4：v と w が mergeable のとき

$$\pi_i(v\vee w)=\frac{|\Gamma(v)|}{|\Gamma(v\vee w)|}\pi_i(v)+\frac{|\Gamma(w)|}{|\Gamma(v\vee w)|}\pi_i(w) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

補題4：公理1～3のもとで

$$\pi_i(v^k)=\begin{cases}|M_v^k|^{-1} & if\ \ i\in M_v^k\\ 0 & if\ \ i\notin M_v^k\end{cases}$$

定理1：(2)式で定義された $\rho_i(v)$ は公理1～4を満たし、公理1～4を満たす関数 $\pi_i(v)$ は(2)式で定義された $\rho_i(v)$ に限る。