ポアソン需要と最適配分

01302694　大阪府立大学 総合科学部　*寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu
01507094　大阪府立大学 総合科学部　北條仁志　HOHJO Hitoshi

1. モデルと定式化

ある地域内にm個の需要点と呼ばれる点とn個の施設が散在している．そして需要点と施設は固定されているものとする．需要点iでは，rate γ_iをもつポアソン過程に従って要求が発生する．この要求は全需要点に対して共通の種目の要求となっており，発生の仕方は各需要点に関して独立であるものとする$(i=1,\ldots,m)$．各需要点で需要が発生するとこの要求を処理するため，施設jへ送る$(j=1,\ldots,n)$．需要点iから施設jへ要求を送るに際しては，d_{ij}の時間がかかるものとし，また施設jでは各要求に対してrate λ_jの指数分布に従って処理されるものとする．

ここで我々の問題は，rate γ_iで発生する需要点iでの要求をn個の施設の中のどれに送って処理すると最も短い時間で処理できるかということである．すなわち，需要点iで発生した要求どの割合で施設jへ送るかを考える．そこで，

$$x_{ij} = \text{需要点}\,i\,\text{で rate}\ \gamma_i\,\text{のポアソン過程で発生した要求のうち施設}\,j\,\text{へ配分される rate}$$

とすると，

$$x_{i1}+\cdots+x_{in}=\gamma_i,\quad x_{i1}\geq 0,\ldots,x_{in}\geq 0,\quad (i=1,\ldots,m) \tag{1}$$

を満足するx_{ij}を決定する問題ということになる．そうすると施設jへの要求の到着は到着率

$$x_j = x_{1j}+\cdots+x_{mj},\quad j=1,\ldots,n \tag{2}$$

をもつポアソン到着ということになり，各jでの処理時間もrate λ_jをもつ指数分布に従うので，要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間は待ち行列におけるM/M/1 待ちシステムの期待待ち時間と需要点から施設への移動時間として評価することができる．目的は，このシステム全体で発生した要求の処理完了までの期待時間を最小にするような配分$x_{ij}\geq 0$, ただし $i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$ を決定することとなる．

2. 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し，これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合，システム全体としての要求処理完了までの時間を最小にするとは，要求発生場所から施設までの移動時間を含め処理待ち時間と処理に関する時間の和が最も長くかかりそうな部署を最小時間で済ませるような要求配分を考えることに他ならない．そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる．

$$\begin{aligned} W_j &= \text{施設}\,j\,\text{での待ち時間を示す確率変数} \\ S_j &= \text{施設}\,j\,\text{での処理時間を示す確率変数} \\ d_{ij} &= \text{需要点}\,i\,\text{から施設}\,j\,\text{への移動時間} \end{aligned}$$

とすると，

$$\min_X \max_{i,j}\{E(W_j+S_j)+u(x_{ij})d_{ij}\}, \tag{3}$$

ここに，$E(Z)$は確率変数Zの期待値を意味し，$u(\cdot)$は

$$u(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

である．また，Xは制約条件を満足するmn組の配分$x_{ij}\geq 0$全体の集合である$(i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n)$.

上記の定式化は，要求の発生や処理がポアソン過程に従うことを限定せず，独立性さえ仮定すればどのような確立法則に対しても通用できる定式化である．要求の発生や処理がポアソン過程に従うことに限定した場合の形式で表現してみよう．W_jをM/M/1 待ち時間とすると，

$$E(W_j) = \frac{x_j}{\lambda_j(\lambda_j - x_j)} \tag{4}$$

であることが知られており，これに伴うトラフィック条件として

$$x_j < \lambda_j$$

が課せられることも知られている．従って制約条件として

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j \tag{5}$$

が要請される．また，後の議論のため，

$$R = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m; \quad M = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

とおくと，(1),(2),(5) より

$$R < M \tag{6}$$

を前提とするのは言うまでもない．次に施設jでの処理時間も rate λ_jの指数分布を仮定してあるので

$$E(S_j) = \frac{1}{\lambda_j} \tag{7}$$

となる．(1),(2),(3),(4),(5),(7) をまとめると我々の問題は，次のような数理計画問題として表現することができる．

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij}) d_{ij} \right] \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_{i1} + \cdots + x_{in} = \gamma_i, \\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j, \\ &\qquad x_{ij} \geq 0, \\ &\qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{A}$$

ここに，

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

これは，非線形の数理計画問題であり，一般的取り扱いは非常に難しい．

以後，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定と考えられる場合，よび移動時間は需要点と施設の位置に依存するが施設の数が２の場合の特別な場合について考察する．ここで，需要点全体の集合をDで，施設全体の集合をFで表すこととする．すなわち，

$$D = \{1, \ldots, n\}; \quad F = \{1, \ldots, m\}.$$

参考文献

Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transpotation Science, v19, p,261-277.

Cooper, R. B. (1990) Queuing theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, 2, D. P Heyman and MJ. Sobel (eds). North-Holland, New York.