2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

A Generalization of the Odd Theorem

01303783　愛知大学　　玉置 光司　TAMAKI Mitsushi

1　はじめに

$I_1, I_2, \ldots, I_n$ を独立事象列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対する indicator とする。$I_j = 1$ のとき、I_j を record indicator と呼ぶ。我々の目的は $I_1, I_2, \ldots, I_n$ を逐次観測し、最後の record indicator で停止することである（その時、試行は成功と見なされる）。Bruss(2000) はこのとき成功確率を最大にする最適停止問題を考え、次の結果を得た。

Theorem 1.1 (Bruss odd theorem)

$p_j = P\{I_j = 1\}, q_j = 1 - p_j$ とし、$r_j = p_j/q_j$ とおく。このとき、最適停止ルール τ_n は臨界値 s のしきい値ルールとなる。すなわち、τ_n は時刻 s 以降最初に出現する record indicator で停止する。ただし、s は次式で与えられる。

$$s = \sup\left\{1, \sup\left\{1 \le k \le n : \sum_{j=k}^{n} r_j \ge 1\right\}\right\}.$$

また、このときの成功確率 $V(n)$ は次式で与えられる。

$$V(n) = \left(\prod_{j=s}^{n} q_j\right)\left(\sum_{j=s}^{n} r_j\right).$$

Remarks: (1) Bruss は r_j を odd と呼び、$K_s = \sum_{j=s}^{n} r_j$ を odd の和と呼んだ。彼はしたがって、最適政策を stop at 1-algorithm と呼んでいる。(2) 秘書問題では良く知られているように

$$P\{I_j\} = 1/j, \quad 1 \le j \le n$$

である。故に、$r_j = 1/(j-1)$ となり、

$$K_s = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

で与えられる。

2　A generalized odd theorem

この小論では上述の最適停止問題を少し拡張して record indicator で停止を希望しても必ずしも停止できるとは限らない場合を考察する。もちろん目的は最後の record indicator で停止することである。簡単のため、最初に、record indicator で停止を希望すると確率 β（出現時刻に無関係に一定）で停止できる場合を考える。

Lemma 2.1

record indicator の総数を X とする。すなわち、$X = \sum_{j=1}^{n} I_j$。このとき、X の分布は次のように与えられる。

$$P\{X = k\} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j, \quad 0 \le k \le n$$

ここで、

$$S_j = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}.$$

我々の問題では臨界値 s のしきい値ルールを次のように解釈する。時刻 s 以降に出現する最初の record indicator で停止を希望する。もし停止すればそれで終了するが、停止しな

ければさらに観測を続け次の record indicator で停止を希望する。以後同様に繰り返して、どこかの record indicator で停止するか、あるいは最後の時点 n に到達するまで試行を継続する。

Lemma 2.2

Q_n を臨界値 1 のしきい値ルールの下での成功確率とすると、これは次式で与えられる。

$$Q_n = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(\beta^j - 1)S_j.$$

今

$$R_j^{(k)} = \sum_{k\le i_1<\cdots<i_j\le n} r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_j}.$$

と定義すると、S_j は次のように表す事ができる。

Lemma 2.3

$$S_j = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j\right)\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}R_k^{(1)}.$$

Lemma2.3 を 2.2 に適用すると次の結果が得られる。

Lemma 2.4

$$Q_n = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j\right)\left[\sum_{j=1}^{n}(1-\beta)^{j-1}\beta R_j^{(1)}\right].$$

以上より次の結果を得る。

Theorem 2.5 (Generalized odd theorem)

最適停止ルール σ_n は臨界値 s のしきい値ルールとなる。s は次式で与えられる。

$$s = \sup\left\{1, \sup\left\{1\le k\le n : \sum_{j=1}^{n-k+1}(1-\beta)^{j-1}\beta R_j^{(k)} \ge 1\right\}\right\}. \quad (2.1)$$

また、このときの成功確率 $V(n)$ は次式で与えられる。

$$V(n) = \left(\prod_{j=s}^{n} q_j\right)\left[\sum_{j=1}^{n-s+1}(1-\beta)^{j-1}\beta R_j^{(s)}\right].$$

Remark:

$$\prod_{j=k}^{n}(1+r_jx) = 1 + \sum_{j=1}^{n-k+1} R_j^{(k)}x^j$$

と書けることに注意すると (2.1) は、

$$s = \sup\left\{1, \sup\left\{1\le k\le n : \beta\prod_{j=k}^{n}(1+(1-\beta)r_j)\ge 1\right\}\right\}$$

と表される。秘書問題の場合、この結果は拒否確率を考慮した Smith(1975) に一致している。

停止確率 β が出現時刻によって異なる場合も Theorem 2.5 と同様な結果が成立する。

Theorem 2.6

record indicator I_j での停止確率が β_j のとき、最適停止ルールは臨界値 s のしきい値ルールとなる。ただし、s は次式で与えられる。

$$s = \sup\left\{1, \sup\left\{1\le k\le n : \sum_{j=k}^{n}\beta_j r_j\prod_{i=k}^{j-1}(1+(1-\beta_i)r_i)\ge 1\right\}\right\}.$$

参考文献

[1] Bruss, F. T., "Sum the odd to one and stop", *Annals of Probability* 28, 1384-1391, 2000.

[2] Smith, M. H., "A secretary problem eith uncertain employment", *Journal of Applied Probability* 12,620-624, 1975.