コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化

01505910 慶應義塾大学 *枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。一方、枇々木[1]は、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述し、線形計画問題として定式化できるシミュレーション型多期間確率計画モデルを提案している。シミュレーション型モデルは定式化の特別な構造を利用した計算アルゴリズムや実装上の工夫を行うことによって、大規模な問題でも高速に問題を解くことができる。それに対し、本論文では「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことにより、問題の規模を縮小し、計算時間を向上させることを目指す定式化の方法を提案する。この定式化の表現方法を『コンパクト表現』と呼び、

- 主コンパクト表現: 主問題形式による記述
- 双対コンパクト表現: 双対問題形式による記述

の2種類を示す。

2 コンパクト表現による定式化

2.1 従来の定式化

n 個の危険資産 $(j=1,\ldots,n)$ と現金に資金を配分する問題を考える。0時点を投資開始時点、T 時点を計画最終時点とする。最終富の期待値をリターン尺度、最終富の1次の下方部分積率をリスク尺度とする。

(1) パラメータ

I ：経路の本数 $(i=1,\ldots,I)$。

ρ_{j0}：0時点の危険資産 j の価格。

$\rho_{jt}^{(i)}$：t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。

r_0 ：期間1の金利(0時点のコールレート)。

$r_{t-1}^{(i)}$：期間 t の経路 i の金利。

W_0：0時点での初期富。

W_E：計画最終時点で投資家が要求する期待富。

W_G：計画最終時点での目標富。

(2) 決定変数

z_{jt} ：t 時点の危険資産 j への投資量。

v_0 ：0時点の現金(コール運用額)。

$v_t^{(i)}$：t 時点の経路 i の現金(コール運用額)。

$q^{(i)}$：最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。

(3) 定式化(紙面の都合上、i と j の範囲の記述は省略)

$$\text{Minimize} \quad LPM_1 \equiv \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 = \sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)} \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + \left(1+r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)}, \quad (t=2,\ldots,T-1) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\rho}_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(1+r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \tag{5}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + \left(1+r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)}\right\} + q^{(i)} \geq W_G \tag{6}$$

$$z_{jt} \geq 0, \ (t=0,\ldots,T-1) \tag{7}$$

$$v_0 \geq 0, \quad v_t^{(i)} \geq 0, \ (t=1,\ldots,T-1) \tag{8}$$

$$q^{(i)} \geq 0$$

2.2 主コンパクト表現への書き換え

シミュレーション型モデルでは、危険資産の決定変数を経路に依存せずに同一にすることによって非予想条件を満足させた。しかし、そのために現金の決定変数を経路ごとに設定することになり、決定変数の数は経路数と期間数に依存し、$(n+I)T+1$ 個である。現金を決定変数から取り除くことができれば、決定変数の数は「危険資産 × 期間数」となり、「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことができる。(2) ～ (4)式の等式を現金を表す決定変数について解き、その非負条件((8)式)に代入することによって現金を表す決定変数を除外する。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} \leq W_0$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} \leq F_t^{(i)}, \ (t=1,\ldots,T-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{T-1}\eta_{jkT}^{(i)}z_{jk}+q^{(i)}\geq W_G-F_T^{(i)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{T-1}\overline{\eta}_{jkT}z_{jk}\geq W_E-\overline{F}_T$$

$$z_{jt}\geq 0,\quad (t=0,\ldots,T-1)\;,q^{(i)}\geq 0$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\eta_{j,k,k+1}^{(i)} &= \rho_{j,k+1}^{(i)}-\left(1+r_k^{(i)}\right)\rho_{jk}^{(i)}, \quad (k=0,\ldots,T-1)\\
\eta_{jkt}^{(i)} &= \left(1+r_{t-1}^{(i)}\right)\eta_{j,k,t-1}^{(i)},\\
&\qquad (k=0,\ldots,T-2;\ t=k+2,\ldots,T)\\
F_1^{(i)} &= (1+r_0)\,W_0\\
F_t^{(i)} &= \left(1+r_{t-1}^{(i)}\right)F_{t-1}^{(i)}, \quad (t=2,\ldots,T)
\end{aligned}$$

$\overline{\eta}_{jkT}=\dfrac{1}{I}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\eta_{jkT}^{(i)},\ \overline{F}_T=\dfrac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}F_T^{(i)}$ である。

2.3 双対コンパクト表現への書き換え

$$\textbf{Maximize}\quad -W_0\lambda_0-\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T-1}F_t^{(i)}\lambda_t^{(i)} +\sum_{i=1}^{I}\left(W_G-F_T^{(i)}\right)\lambda_T^{(i)}+\left(W_E-\overline{F}_T\right)\omega$$

subject to

$$-\rho_{j0}\lambda_0+\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\eta_{j0t}^{(i)}\lambda_t^{(i)}+\overline{\eta}_{j0T}\omega\leq 0$$

$$-\sum_{i=1}^{I}\rho_{jk}^{(i)}\lambda_k^{(i)}+\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=k+1}^{T}\eta_{jkt}^{(i)}\lambda_t^{(i)}+\overline{\eta}_{jkT}\omega\leq 0,\qquad (k=1,\ldots,T-1)$$

$$\lambda_T^{(i)}\leq\frac{1}{I},\ (i=1,\ldots,I)$$

$$\lambda_0\geq 0,\quad \lambda_t^{(i)}\geq 0,\ (t=1,\ldots,T),\quad \omega\geq 0$$

1次の下方部分積率のような2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合には、問題を双対問題に書き換えることによって、決定変数の有界制約式が増加し、実質的に計算時間に影響を与える制約式の本数を激減させることができる。

2.4 コンパクト表現のバリエーション

資産の組み入れ比率に対する上下限制約式や売買回転率に対する上限制約式などの追加的な制約条件を設定することができる。また、リスク尺度に CVaR を用いたモデルを用いたり、売買コストを考慮したモデルなど、様々なバリエーションが考えられる。その他、コール・ローンとコール・マネーの金利を同じに設定した ALM モデルやシミュレーション/ツリー混合型モデル[2]へも適用可能である。

3 数値実験

- 期間数：3種類 (3期間, 4期間, 5期間)
- 経路数：10種類 (1,000 ～ 10,000；1,000本刻み)
- 対象資産数：1種類(株式、債券、CB、現金)
- ソフトウェア(NUOPT)：2種類 (Ver.3.1, Ver.4.0)
- 解法アルゴリズム：2種類 (内点法, 単体法)
- 要求期待富の水準：3種類
- 計算機環境：Windows 98, 1500 MHz, 512MB

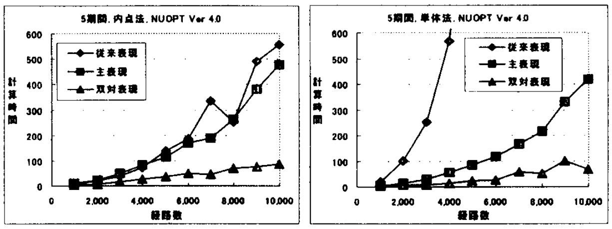

図 1：計算時間の比較(5期間, NUOPT Ver.4.0)

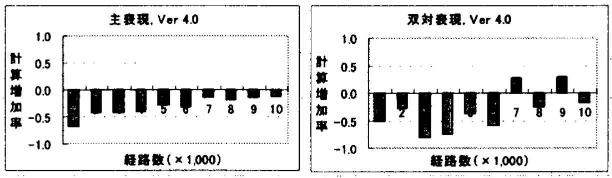

図 2：内点法と単体法の比較(5期間の場合)
［0以上：内点法有利, 0以下：単体法有利］

4 まとめ

本研究では、シミュレーション型モデルの取引戦略の特徴をうまく反映させたコンパクト表現による定式化の方法を提案した。3種類の定式化に対する計算時間を比較するために様々な数値実験を行った。特に単体法では、コンパクト表現は有利な定式化の方法であり、特に双対コンパクト表現は最大で従来の定式化の100倍近く高速化される。主コンパクト表現も最大で20倍近く高速化される。また、解法(内点法と単体法)の違いにかかわらずに、シミュレーション経路数が多くなっても、ほぼ同じ計算時間で解くことができる。

参考文献

[1] 枇々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **44**, No.2(2001).
[2] 枇々木規雄, 資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 2000年夏季大会予稿集, pp. 175–193.
[3] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.