2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

待ちを伴う仕事終了確率最大化問題

01107945　鳥取大学工学部　*小柳　淳二　KOYANAGI Junji
01103205　鳥取大学工学部　河合　一　KAWAI　Hajime

1　はじめに

本研究では、2種類の仕事を一人で行う場合を考える。仕事 A(JA) は離散時間待ち行列システムで処理をされ、いったん、この仕事をするために待ち行列にはいったならば、仕事が終わるまで、他の仕事はできないものとする。仕事 B(JB) は、いくつかのステップからなり、各ステップには単位時間を要する。各ステップの終わりに、作業者は待ち行列を観測し、行列に加わるかどうかを判断する。ただし、JA が終了していない状態で、JB が終了したなら、JA のために待ち行列に加わらねばならない。すべての作業は制限時間内に終える必要があるものとし、作業者は制限時間内に両方の仕事を終える確率を最大にするように、待ち行列へ並ぶものとする。この問題を動的計画法で定式化し、最適政策の構造について調べる。

2　モデル

2種類の仕事 A(JA) と B(JB) を一人の作業者が処理する場合を考える。JA は離散時間待ち行列で処理されるもので、その待ち行列システムは各時点で確率 q で作業が終了し、確率 p で客の到着があるものとする (各時点では作業終了が先に判定される)。JB は L 単位時間必要な作業で、作業者が待ち行列に並んでいないときに処理される。JA と JB は制限時間 R のうちに終了させなければならず、そのために、各時点において、待ち行列長 i と JB の残りサービス時間 L をもとにして判断を下す。

まず

$$\sum_{k=i+1}^{R-L} \binom{R-L}{k} q^k \bar{q}^{R-L-k}. \tag{1}$$

を考える。(ここで $\bar{a} \equiv 1-a$) この式は、サーバーが $R-L$ 時間以内に、 $i+1$ 以上の客をサービスする確率であり、状態 (i, L, R) でサーバーに加われば、この確率で成功することになる。(ただし $R-L > i$)

状態 (i, L, R) で JB を続けることを選択すると、$i > 0$ では次の状態が確率 $\bar{p}q$ で $(i-1, L-1, R-1)$、確率 $pq+\bar{p}\bar{q}$ で $(i, L-1, R-1)$、確率 $p\bar{q}$ で $(i+1, L-1, R-1)$ となる。

待ち行列に入ると成功確率が決定されるため、状態 (i, l, r) として、待ち行列が i、JB の残り時間が l、制限時間まで r 残っている状態をとることができるが、$r-l$ は定数であるから、$S \equiv r-l$ とおいて (i, l, S) を状態とする。

3　定式化

状態 (i, l, S) に対して、以下の確率を考える。

$A(i, l, S)$: 行列に入ったとき、成功する確率。
$B(i, l, S)$: JB を続け、その後最適に行動した場合に成功する確率
$V(i, l, S)$: 最適に行動したとき成功する確率

行列が空のとき，列に並ぶことが最適であるので，$i > 0$ に対する以下の最適性方程式を得る。

$$A(i, l, S) = \sum_{k=i+1}^{S} \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k} \quad (i < S), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} B(i, l, S) &= \bar{p}qV(i-1, l-1, S) \\ &\quad + (pq + \bar{p}\,\bar{q})V(i, l-1, S) \\ &\quad + p\bar{q}V(i+1, l-1, S), \end{aligned} \tag{3}$$

$$V(i, l, S) = \max\{A(i, l, S), B(i, l, S)\}. \tag{4}$$

ここで 状態 (i, l, S) で JB を継続し、次に 待ち行列に加わったときに成功する確率 $C(i, l, S)$

を考える、定義より $B(i,1,S)=C(i,1,S)$ である。

$C(i,l,S)$ に対して以下の補題を証明することができる。

補題 1 $C(i,l,S) \geq A(i,l,S)$ が $i+1 \geq p(S+1)$ のときに成立する。

証明.
まず $C(i,l,S)$ を $i<S-1$ に対して計算する。

$$\begin{aligned} C(i,l,S) &= \bar{p}q\sum_{k=i}^{S}\binom{S}{k}q^k\bar{q}^{S-k} \\ &\quad + (pq+\bar{p}\bar{q})\sum_{k=i+1}^{S}\binom{S}{k}q^k\bar{q}^{S-k} \\ &\quad + p\bar{q}\sum_{k=i+2}^{S}\binom{S}{k}q^k\bar{q}^{S-k}. \end{aligned} \tag{5}$$

すると、

$$\begin{aligned} &C(i,l,S)-A(i,l,S) \\ &= \bar{p}q\binom{S}{i}q^i\bar{q}^{S-i} - p\bar{q}\binom{S}{i+1}q^{i+1}\bar{q}^{S-i-1} \end{aligned} \tag{6}$$

が成立する。よって $C(i,l,S) \geq A(i,l,S)$ は

$$\bar{p}\binom{S}{i} \geq p\binom{S}{i+1}. \tag{7}$$

のときに成り立つ。以下計算により補題を得る。
□

この補題を $V(i,1,S)$ に適用すると、ある i に対して $A(i,1,S) \leq C(i,1,S)$ ならば、$j \geq i$ に対しても $A(j,1,S) \leq C(j,1,S)$ が成立する。

ここで $i_l = \max\{i|A(i,l,S) \geq B(i,l,S)\}$ と定義すると以下の定理を得る。

定理 1

1. i_l は l に関して減少。
2. $A(i,l,S) \geq B(i,l,S)$ が $i \leq i_l$ に対して成り立ち、かつ $i_l - i_{l+1} \leq 1$ である。

4 数値例

$S=4$, $p=0.7$ と $q=0.9$ に対して最適政策を最適性方程式により計算する。以下の表では、'A' は行列に加わるのがよいことを示し、'B' は JB を続けるのが良いことを示す。'0' は成功確率が 0 であることを示す。

$i > p(S+1)-1 = 0.7*5-1 = 2.5$ に対しては補題 2 より最適政策は JB となる。

l	最適政策												
8	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0
7	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0
6	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0
5	A	A	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0
4	A	A	A	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0
3	A	A	A	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0
2	A	A	A	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0
1	A	A	A	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0
0	A	A	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0					5					10		i

表 1: 最適政策（$S=4$）

これらの表は最適政策の i と l に関する単調性をあらわしている。すなわち i と l の増加に対して、最適政策は最大 1 回しか変化しない。

5 結論

2 種類の仕事を制限時間内に処理するというモデルをとり扱い，制限時間内に両方の仕事を終了させることを目的とした。その結果、最適政策には単調にアクションが変化する性質があることを示し、アクションが変化する境界についても、最大 1 しか変化しないことを示した。数値計算の結果から、制限時間の増加に対するアクションの変化も単調であることが予想できるが、証明はできていない。