再生サイクル法によるポラチェック●キンチンの公式の証明

01402130 東京都立大学*中塚利直 NAKATSUKA Toshinao

M/G/1の定常状態における系内客数の分布についてはポラチェック●キンチンの公式が有名である。これはこの分布を確率母関数（PGF）の形で示したものであり、$\rho < 1$ において

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{1}$$

と表される。ここで $B(x)$ はサービス時間の分布であり、b はその平均、$B^*(s)$ は $B(x)$ のラプラス●スチルチェス変換（LST）である。λは到着のインテンシティであって、$\rho = \lambda b$ とおく。この公式の導出にはポラチェックやキンチンの初期の研究ののち、ケンドールが退去時点での分布に注目し、隠れマルコフ法を提唱し、求めている。その後ほとんどの教科書はケンドールのこの方法を紹介している。他にはブラント他の本で、G/G/1の仕事量に関するタカツの公式から、任意時点での系内客数の (1) の公式を導き出している。

筆者は近年、再生サイクル法の有効性を述べているが、ポラチェック●キンチンの公式についても、以下のようにして、導出できることを述べておく。この方法は初歩的な技術しか使わないので、学ぶ上からも便利だと思う。まず、M/G/1においては、客のいない区間と、稼動期間が交互に現れる。そこで、

$$\Pi(z) = \frac{\alpha_1}{\lambda} + \alpha_2\theta_2\Pi(z:busy)$$

と表される。$\Pi(z:busy)$ は稼動期間上の系内客数のPGFである。θ_2は稼動期間の長さの平均であり、これは $b/(1-\rho)$ となることがわかっている。係数α_1, α_2については、$\alpha_1 : \alpha_2 = 1:1$ と$\alpha_1/\lambda + \alpha_2\theta_2 = 1$ とから$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda(1-\rho)$ である。よって

$$\Pi(z) = 1 - \rho - \rho\Pi(z:busy). \tag{2}$$

$\Pi(z:busy)$ を次に求めよう。稼動期間の最初のサービス時間内に k 人の客が到着したとすると、LIFOで考えれば、その後 k 回のM/G/1の稼動期間が繰り返される形になる。よって、この部分のPGFは k が与えられた条件下で

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{i=1}^{k}\frac{b}{1-\rho}z^{i-1}\Pi(z:busy) &= \frac{1}{k}\Pi(z:busy)\sum_{i=1}^{k}z^{i-1}\\ &= \frac{1-z^k}{k(1-z)}\Pi(z:busy)\end{aligned}$$

となる。そこで k も確率変数とすると、

$$\alpha\sum_{i=1}^{\infty}p_k\frac{kb}{1-\rho}\frac{1-z^k}{k(1-z)}\Pi(z:busy)=\frac{\Pi(z:busy)}{\rho(1-z)}\sum_{i=1}^{\infty}p_k(1-z^k)$$
$$=\frac{1-B^*(\lambda-\lambda z)}{\rho(1-z)}\Pi(z:busy)$$

と表される。

他方、最初のサービス時間上のＰＧＦは

$$z\frac{1-B^*(\lambda-\lambda z)}{\rho(1-z)}$$

であるから（証明略）

$$\Pi(z:busy)$$
$$=\alpha bz\frac{1-B^*(\lambda-\lambda z)}{\rho(1-z)}+\alpha(\frac{b}{1-\rho}-b)\frac{1-B^*(\lambda-\lambda z)}{\rho(1-z)}\Pi(z:busy)$$

$z=1$ を入れると、$\alpha=(1-\rho)/b$ であることがわかる。(2) 式を代入すると

$$(\Pi(z)-1+\rho)(1-z)$$
$$=(1-\rho)z(1-B^*(\lambda-\lambda z)+(1-B^*(\lambda-\lambda z))(\Pi(z)-1+\rho)$$

これから$\Pi(z)$ を求めるとポラチェック•キンチンの公式 (1) が得られる。