一般化された発注–点検モデルについて

土肥正 † (01307065), 海生直人 ‡ (01105445), 尾崎俊治 †† (01002265)
† 広島大学大学院工学研究科, ‡ 広島修道大学経済科学部, †† 南山大学数理情報学部

1. はじめに

年齢取替モデルの一つの拡張である発注–取替モデルのバリエーションは数多く存在し，多くの研究者によってその精密化並びに一般化が行われている [1, 2]. 本稿の目的は，最近筆者らが文献 [3] で議論した発注–取替モデルを，さらに発注–点検モデル（例えば [4]）に拡張し，コスト有効性と呼ばれる評価尺度を最大にする最適発注–点検方策を導出することである．

2. モデルの記述

機器の寿命 X は連続で非負の確率変数であり，その確率分布関数を $F(t)$, 確率密度関数を $f(t)$, 平均を $1/\lambda$, 故障率を $r(t)$ とする．時刻 $t=0$ において機器は動作を開始し，時刻 t_0 で機器の状態が点検されるものと仮定する．もし時刻 t_0（発注–点検時刻）において機器の故障が発見されたならば，直ちにスペア機器の緊急発注が行われる．緊急発注に要するリードタイムは連続で非負の確率変数 L_1 であり，その確率分布関数を $G_1(t)$, 平均を $1/\mu_1$ とおく．一方，時刻 t_0 での点検で機器が故障していなかったとしても，その時点において予防保全の一環としてスペア機器を通常発注するものとする．この通常発注に要するリードタイム L_2 もまた連続で非負の確率変数であり，その分布関数を $G_2(t)$, 平均を $1/\mu_2$ とおく．スペア機器の補充時点で機器がまだ稼働中であれば，手持ちスペア在庫として保管される．

機器の故障が時刻 $(t_0, t_0+L_2]$ の間に発生したら，スペア機器が補充されるまでの期間は動作不能となる．また，時間間隔 $(t_0, t_0+L_2+t_1]$ 中に機器が全く故障しない場合は，時刻 $t=t_0+L_2+t_1$ で機器の予防取替がなされるものと仮定する．ここで，t_1 は通常発注によるスペアの補充時刻 $(t=t_0+L_2)$ から測った予防取替時刻であり，許容在庫期間を意味する．よって，時間間隔 $(t_0+L_2, t_0+L_2+t_1]$ で故障が発生した場合には，直ちにスペア在庫によって取替が行われる．一般性を失うことなく，故障（動作）機器を補充（在庫）スペアによって取替えるために必要な時間は無視できる程小さいものと仮定する．時刻 $t=0$ から機器の取替が完了するまでの時間間隔を1サイクルとして定義すれば，上述のモデルは各サイクルにおいて独立で同一の確率的な挙動を示す再生報酬過程として捉えることが可能である（図1を参照）．

次に費用構造について仮定する．k_1 を単位不稼働時間当たりに発生するペナルティ費用，k_2 を単位時間当たりの在庫維持費用，c_1 を緊急発注1回当たりの費用，c_2 を通常発注1回当たりの費用，c_3 を1回当たりの点検費用とする．費用パラメータに関して以下の仮定を設定する．

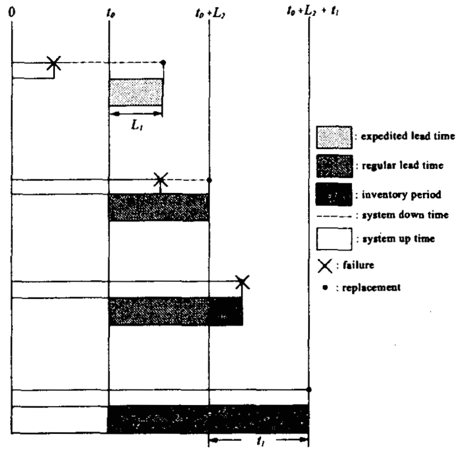

図 1: 発注–点検モデルの概念図.

(A-1) $c_1 + k_1/\mu_1 > c_2 + k_1/\mu_2$.

すなわち，緊急発注による費用の方が通常発注による費用よりも常に高いことを意味している．

これより，1サイクル中に発生する期待ペナルティ費用，点検・発注に要する期待費用，期待在庫維持費用を，それぞれ

$$V_p(t_0) = k_1\Big\{(1/\mu_1 - 1/\mu_2)F(t_0) + \int_0^\infty \int_0^{t_0+l_2} \times F(t)dtdG_2(l_2)\Big\}, \quad (1)$$

$$V_c(t_0) = c_1F(t_0) + c_2\overline{F}(t_0) + c_3, \quad (2)$$

$$V_i(t_0,t_1) = k_2 \int_0^\infty \int_{t_0+l_2}^{t_0+l_2+t_1} \overline{F}(t)dtdG_2(l_2) \quad (3)$$

とすれば，1サイクル中に発生する総期待費用は

$$V(t_0,t_1) = V_p(t_0) + V_c(t_0) + V_i(t_0,t_1) \quad (4)$$

となる．ここで，一般に $\overline{\psi}(\cdot) = 1 - \psi(\cdot)$ である．また，1サイクル中の平均動作（可能）時間は

$$T(t_0,t_1) = \int_0^\infty \int_0^{t_0+l_2+t_1} \overline{F}(t)dtdG_2(l_2) \quad (5)$$

となる．これより，コスト有効性は単位期待費用当たりの平均動作時間として以下のように定義される．

$$E(t_0,t_1) = T(t_0,t_1)/V(t_0,t_1). \quad (6)$$

よって，問題は最適方策

$$(t_0^*, t_1^*) = \left\{ (t_0, t_1) \mid \max_{(t_0,t_1)} E(t_0, t_1) \right\} \tag{7}$$

を導出することである．

以下の定理はコスト有効性を最大にする最適方策 (t_0^*, t_1^*) を特徴付けるために重要である．

定理 1: 関数 $q(t_0) = V(t_0, t_1) - k_2 T(t_0, t_1)$ を定義する．$q(t_0) \leq \ (>)\ 0$ ならばコスト有効性 $E(t_0, t_1)$ は t_1 の広義減少（狭義増加）関数となり，最適な許容在庫期間は $t_1^* = 0$ $(t_1^* \to \infty)$ となる．

上述の分解構造により，2 変数最適化問題 $\max_{(t_0,t_1)} E(t_0, t_1)$ は事実上 1 変数問題に帰着される．

3. 特別な場合: $t_1^* \to \infty$

$t_1^* \to \infty$ のとき，簡単な計算から

$$\begin{aligned}
E(t_0,\infty) &= T(t_0,\infty)/V(t_0,\infty), && (8)\\
V(t_0,\infty) &= k_1\Big\{(1/\mu_1 - 1/\mu_2)F(t_0) + \int_0^\infty \int_0^{t_0+l_2} \\
&\quad \times F(t)dtdG_2(l_2)\Big\} + c_1F(t_0) + c_2\overline{F}(t_0) \\
&\quad + c_3 + k_2 \int_0^\infty \int_{t_0+l_2}^\infty \overline{F}(t)dtdG_2(l_2), && (9)\\
T(t_0,\infty) &= 1/\lambda && (10)
\end{aligned}$$

となる．次のような関数

$$\begin{aligned}
g_\infty(t_0) &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Big\{\Big[k_1(1/\mu_1 - 1/\mu_2) + c_1 - c_2\Big]r(t_0) \\
&\quad + k_1\Big[R(t_0) + \frac{F(t_0)}{\overline{F}(t_0)}\Big] - k_2\overline{R}(t_0)\Big\}, && (11)\\
R(t_0) &= \int_0^\infty \frac{F(t_0+l_2) - F(t_0)}{\overline{F}(t_0)} dG_2(l_2) && (12)
\end{aligned}$$

を定義する．

補題: 関数 $R(t)$ の 1 次導関数の符号は，故障率 $r(t)$ の 1 次導関数の符号に等しい．

定理 2: 仮定 (A-1) の下で $F(t)$ が狭義 IFR (Increasing Failure Rate) とする．

(i) $g_\infty(0) > 0$ ならば，コスト有効性 $E(t_0,\infty)$ を最大にし，方程式 $g_\infty(t_0^*) = 0$ を満たす有限で唯一の最適発注–点検時刻 t_0^* $(0 < t_0^* < \infty)$ が存在する．

(ii) $g_\infty(0) \leq 0$ ならば $t_0^* = 0$ となり，発注–点検は機器の動作開始時点でなされるのが最適となる．

定理 3: 仮定 (A-1) の下で，

(i) $dg_\infty(t_0)/dt_0 < 0$ ならば， 定理 2 における (i) と (ii) のいずれか一方が成立する．

(ii) $dg_\infty(t_0)/dt_0 \geq 0$ ならば常に $t_0^* = 0$ となる．

4. 特別な場合: $t_1^* = 0$

同様に $t_1^* = 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
E(t_0,0) &= T(t_0,0)/V(t_0,0), && (13)\\
V(t_0,0) &= k_1\Big\{(1/\mu_1 - 1/\mu_2)F(t_0) + \int_0^\infty \int_0^{t_0+l_2} \\
&\quad \times F(t)dtdG_2(l_2)\Big\} + c_1F(t_0) \\
&\quad + c_2\overline{F}(t_0) + c_3, && (14)\\
T(t_0,0) &= \int_0^\infty \int_0^{t_0+l_2} \overline{F}(t)dtdG_2(l_2) && (15)
\end{aligned}$$

を得る．さらに，次のような関数

$$\begin{aligned}
g_0(t_0) &= \overline{R}(t_0)V(t_0,0) - \Big\{\Big[k_1(1/\mu_1 - 1/\mu_2) + c_1 \\
&\quad - c_2\Big]r(t_0) + k_1\Big[R(t_0) + \frac{F(t_0)}{\overline{F}(t_0)}\Big]\Big\}T(t_0,0) && (16)
\end{aligned}$$

を定義する．

定理 4: 仮定 (A-1) の下で $F(t)$ が狭義 IFR とする．

(i) $g_0(0) > 0$ ならば，コスト有効性 $E(t_0, 0)$ を最大にし，方程式 $g_0(t_0^*) = 0$ を満たす有限で唯一の最適発注–点検時刻 t_0^* $(0 < t_0^* < \infty)$ が存在する．

(ii) $g_0(0) \leq 0$ ならば常に $t_0^* = 0$ となる．

定理 5: 仮定 (A-1) の下で，

(i) $dg_0(t_0)/dt_0 < 0$ ならば， 定理 4 における (i) と (ii) のいずれか一方が成立する．

(ii) $dg_0(t_0)/dt_0 \geq 0$ ならば常に $t_0^* = 0$ となる．

参考文献

[1] T. Dohi, N. Kaio and S. Osaki, "On the optimal ordering policies in maintenance theory – survey and applications," *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **14** (4), 309–321 (1998).

[2] P. K. Kapur, R. B. Garg and S. Kumar, *Contributions to Hardware and Software Reliability*, World Scientific, Singapore (1999).

[3] T. Dohi, N. Kaio and S. Osaki, "The cost-effective optimal order–replacement policies," to appear in *Proc. 5th Int'l Sympo. on Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Compiegne, France (June 12–15, 2001).

[4] N. Kaio, T. Dohi and S. Osaki, "Optimal maintenance policies with lead times and repair," *International Journal of Systems Science*, **23** (8), 1299–1308 (1992).