最小費用フォレストゲームのコアについて

02004620 慶應義塾大学 *梅澤 正史 UMEZAWA Masashi
01400760 慶應義塾大学 西野 寿一 NISHINO Hisakazu

1 はじめに

本研究では、ネットワーク上に存在するサービスを利用する消費者間での費用配分問題を考える。この問題は、以下のような問題である。ネットワーク上に存在するサービス供給者はそれぞれ異なったサービスを提供し、各消費者は自分が必要とするサービスの集合を持っているとする。消費者はサービス供給者へ物理的なパスとして繋がることによって需要を満たすとする。その際に必要となるネットワーク構築費用を、消費者間でどのように配分したらよいのかというのがこの問題の趣旨であり、この問題をゲーム論的枠組みで捉えたモデルを最小費用フォレストゲーム (Minimum Cost Forest Game) と呼ぶ。このゲームの費用配分に対して、協力的な解概念の１つであるコアの存在について調べる。

従来、サービス供給者が１人という特殊ケース (Minimum Cost Spanning Tree Game) に関しては、コアが必ず存在することがわかっている (Granot and Huberman [2], Megiddo[4]) 。Kuipers[3] は、最小費用フォレストゲームにおいて、コアは必ずしも非空であるとは限らないことを例を挙げて示しており、コアが非空であるための十分条件を与えている。しかし、本研究において様々な例を試したところ、これらの十分条件が成り立たない多くの場合にもコアは非空であることが確かめられた。そこで、これらの十分条件を含むより一般的な十分条件を提案する。

2 モデル

$N=\{1,...,n\}$ を消費者の集合とし、$M=\{n+1,...,n+m\}$ をサービス供給者の集合とする。任意の消費者 $i\in N$ に対して、i が必要とするサービスの集合 $M(i)\subseteq M$ が与えられているものとする。さらに、d_{ij} を i と j を結ぶ直接のリンクにかかる費用（重み）とする。グラフ $G_E=(N\cup M,E)$ を考える。ここで、$E\subseteq(N\cup M)\times(N\cup M)$ である。結託 $S\subseteq N$ 内のどのプレーヤー i にとっても、$M(i)$ 内の任意の頂点へ行くことができるパスが存在する時、G_E を S-実行可能であると言う。S-実行可能なネットワークを作るために、結託 S は、$N\backslash S$ 及び S 内のプレーヤーによって必要とされていないサービス供給者を表す頂点を利用しても構わないものとする。G_E がサイクルを持つならば、S-実行可能又は N-実行可能を保ったまま、少なくとも１本の辺を取り除くことができる。そうすることによって、ネットワークの建設費を少なくすることができる。さらに、ネットワークは木である必要はないことに注意する。結託 S の特性関数は、以下のように定義される。

$$C(S)\equiv\min\{\sum_{\{i,j\}\in E} d_{ij}|G_E:S\text{-実行可能なネットワーク}\}$$

(N,C) を最小費用フォレストゲーム（略して、MCF ゲーム）という。ここでは、N-実行可能なフォレストを建設するための費用配分について考える。ゲーム理論で良く知られた解概念の１つであるコアは、以下のような配分の集合である。

$$\begin{aligned}Core(C)\equiv\ &\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n|\textstyle\sum_{i\in N}x_i=C(N),\\ &\textstyle\sum_{i\in S}x_i\le C(S)\ \ \forall S\subseteq N\}\end{aligned}$$

3 コアの非空性

前に述べたように、MCF ゲームのコアは常に非空とは限らない。そこで、非空になるための十分条件を与える。

補助定理 1 ([1]) (V,d) をネットワークとし、Γ を頂点集合 V を持つ全域木とする。任意の頂点ペア $v,w\in V$ に対して、d^{Γ}_{vw} を Γ 内で v から w へ行く一意のパスに沿った辺たちの重み最大値とすると、以下のことが同値である。*1)*Γ は (V,d) における極小全域木である。*2)*$d\ge d^{\Gamma}$ が成り立つ。

補助定理 2 ([3]) (V,d) をネットワークとし、Γ と Ω をそれぞれ頂点集合 V を持つ極小全域木とすると、$d^{\Gamma}=d^{\Omega}$ である。

補助定理 3 ([3]) 極小なネットワーク上での *MCF* ゲームは、サブ・モジュラーである。

補助定理 4 ([3]) ネットワーク (V,d) の最小全域木 Γ の建設費を $K(V)$、このネットワークにおける極小ネットワーク $(V,\bar{d})$ の最小全域木 $\bar{\Gamma}$ の建設費を $\bar{K}(V)$ とする。この時、*1)*$K(V)=\bar{K}(V)$、*2)*$(V,\bar{d})$ において、任意の $U\subseteq V$ に対して、U が連結集合になるような最小全域木 $\bar{\Gamma}_U$ が存在する。

もし消費者 $i,\ i'\in N$ が共通のサービス供給者を必要とするならば、最適な N-実行可能ネットワークにおいて、$i,\ i'$ は、同一の木上に存在するはずである。また、ある消費者のペアが共通のサービス供給者を持たなくても、需要の構造上、最適なネットワークにおいては別の第3者を通じてやはり結果的に連結されているはずである、という状況も生じうる。そこで、以下の定義をする。

定義 1 任意の２つの添え字 $1\geq i,j\geq n$ に対して、$\{a_{ii_1},a_{i_1i_2},...,a_{i_mj}\}$ となる行列 A の非ゼロ要素からなる列が存在する時、A を分解不能という。

MCF ゲーム (N,C) の接続行列 $A=(a_{ii'})$ の定義を与える。任意の $i,i'\in N$ に対して、

$$a_{ii'}=\begin{cases}1 & M(i)\cap M(i')\neq\emptyset\\ 0 & M(i)\cap M(i')=\emptyset\end{cases}$$

定義 2 接続行列 A の極大な分解不能部分行列を分解不能成分といい、それに伴ってプレーヤー集合を $N=\oplus_{j=1}^{p}N_j$ と分割できる。N_j を分解不能プレーヤー集合と呼ぶ。特に、分解不能成分が１つの時、その *MCF* ゲーム (N,C) を分解不能であるという。

定理 1 分解不能な *MCF* ゲーム (N,C) は、非空なコアを持つ。

次に、分解不能でない MCF ゲームに対するコアの存在について調べる。任意の MCF ゲーム (N,C) が与えられた時、N を分解不能成分に仕分けることは、多項式時間で可能である。さらに、それに連動して $M=\oplus_{j=1}^{p}M_j$ と分割できる。この時、次のようなゲームを考える。$V=\oplus_{j=1}^{p}V_j$ (ここで、$V_j\equiv N_j\cup M_j$) とする。

$$\hat{d}_{vw}=\begin{cases}\bar{d}_{vw} & \exists j:v,w\in V_j\\ d_{vw} & \nexists j:v,w\in V_j\end{cases}$$

ここで、$\bar{d}$は、各部分ネットワーク (V_j,d) $(j=1,...,p)$ における最小全域木 Γ_j から作られた、極小なネットワーク $(V_j,\bar{d})$ における辺の重み関数を表す。

この辺の重み関数 $\hat{d}$ に対して定義されるネットワーク $(V,\hat{d})$ における MCF ゲームを $(N,\hat{C})$ とする。

今、$K(V_j)$ をネットワーク (V_j,d) における最小全域木 Γ_j を作るのにかかる費用とする。この時、任意の $j=1,...,p$ に対して、$K(V_j)=\bar{K}(V_j)=\hat{K}(V_j)$ であることに注意する。

補助定理 5 *MCF* ゲーム (N,C) に対して、N_j $(j=1,...,p)$ を分解不能成分とする。もし、$C(N)=\sum_{j=1}^{p}K(V_j)$ であるならば、$\hat{C}(N)=C(N)$, $\hat{C}(S)=\sum_{j\in J(S)}\bar{C}(S_j)$ である。ここで、$J(S)=\{j\in\{1,...,p\}|S_j\equiv S\cap N_j\neq\emptyset\}$ である。

定理 2 *MCF* ゲーム (N,C) に対して、N_j $(j=1,...,p)$ を分解不能成分とする。もし、$C(N)=\sum_{j=1}^{p}K(V_j)$ であるならば、このゲームは非空なコアを持つ。

定理 3 *MCF* ゲーム (N,C) に対して、N_j $(j=1,...,p)$ を分解不能成分とする。もし、$p=2$ ならば、このゲームは非空なコアを持つ。

4　まとめ

分解不能な MCF ゲームのコアは、常に非空であることを示し、複数の分解不能成分を持つ場合にもコアが存在するための十分条件を与えた。

参考文献

[1] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*: (Princeton University Press, Princeton, 1962).

[2] D. Granot and G. Huberman, "Minimum cost spanning tree games", *Mathematical Programming*, 21 (1981) 1-18.

[3] J. Kuipers, "Minimum cost forest games", *International Journal of Game Theory*, 26 (1997) 367-377.

[4] N. Megiddo, "Cost allocation for steiner trees", *Networks*, 8 (1978) 1-6.