2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# 木構造の動的ネットワークにおける施設配置問題

大阪大学 *間々田聡子 MAMADA Satoko
大阪大学 牧野和久 MAKINO Kazuhisa
大阪大学 藤重 悟 FUJISHIGE Satoru

## 1. 序論

物資輸送網等における問題を考える際には，ネットワークモデルが用いられる．輸送問題において輸送時間を考慮するネットワークを動的ネットワークという．動的ネットワーク中のいくつかの供給点から需要点へ定まった量を最短時間で輸送する問題については，B. Hoppe–É. Tardos [1] によって多項式時間アルゴリズムが提案されているが，それは高次の多項式時間アルゴリズムである．そこで本研究では，対象となるネットワークが木構造であり，各点に与えられた供給量を最速に輸送するような最適な出口を見出す問題を考える．この問題が，フローのパタンを表すテーブルを用いて，$O(n^2)$ 時間で解けることを示す (ただし，$n$ は点数である).

## 2. 問題の設定と定義

無向グラフ $G=(V,E)$ を考え，$u:E\to\mathbf{R}_+$ は各枝に非負の実数を与える容量関数，$\tau:E\to\mathbf{Z}_+$ は各枝の一方の端点から他方の端点への輸送時間を与える非負整数値関数であるとする．このようなネットワークを $\mathcal{N}=(G=(V,E),u,\tau)$ と表す．以下, $G$ は木であると仮定する．また，各点でフローの滞留は可能であるとする．

いま，供給量 $b:V\to\mathbf{R}_+$ が与えられているとする．このとき全ての点の供給量を最速で送り届けられるような出口 $t\in V$ を求める問題を考えよう．より正確には, $V\backslash\{t\}$ からの供給量を $t$ へ流す動的フローを考えたときに，その全てのフローが $t$ に到着する時間を最小にする出口 $t$ を求める施設配置問題を考える．これは1-センター問題の動的フロー版としてとらえることができる．

この問題を解くにあたり，次のような用語を定義する．各点におけるフローの到着量の変化を表す到着テーブルおよび，各点からその親に向う送出量の変化を表す送出テーブルを保持する．ある時刻 $k$ の到着量（あるいは送出量）を $g(k)$ とする．$g(k)\neq g(k-1)$ のとき，$k$ を $g$ の変化時刻という．ただし $k<0$ では，$g(k)=0$ であるとする．また，ある $\alpha\geq 2$ に対して $g(k-\alpha)<g(k-\alpha+1)=\cdots=g(k-1)>g(k)=g(k+1)$ を満たすような $g$ の変化パタンを山パタンと呼ぶ. $g(k)(0\leq k)$ の情報は，$g$ の変化時刻 $k_1,k_2,\cdots$ と $g$ の値 $g(k_1),g(k_2),\cdots$ のテーブルによって表現される．

ここで，テーブルのサイズに関係する変化時刻の数について，以下の補題が成り立つ．

**補題 1** 各点の到着・送出テーブルにおいて，変化時刻の数は高々$3n$ である．

(証明) 図1のように，$v_i$ を根とする部分木を $T_i$ とし，$T_i$ の点数を $n_i$ とする．点 $v_i$ の到着テーブルにおける変化時刻の数を $d_i$，山パタンの数を $p_i$ とし，$v_i$ の子が $v_{i1},\cdots,v_{i\delta_i}$ のとき，その各点 $v_{ij}$ での到達テーブルの変化時刻の数を $d_{ij}$，山パタンの数を $p_{ij}$，点 $v_{ij}$ を根とする部分木の点数を $n_{ij}$ とする．そして，各点 $v_{ij}$ からの送出テーブルの変化時刻の数を $d'_{ij}$，山パタンの数を $p'_{ij}$ とする．ここで，点数は $n_i=n_{i1}+\cdots+n_{i\delta_i}+1$ を満たす．

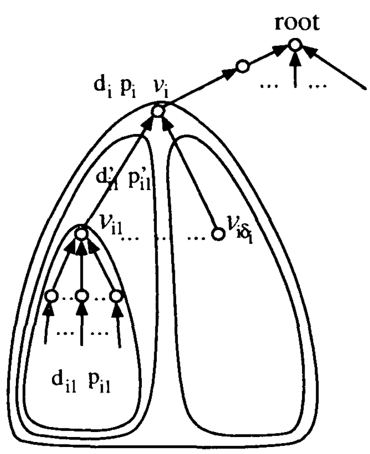


図 1: 部分木 $T_i$ の定義

最初に，つぎの (1) を仮定する．これらは葉においては明らかになりたつ．

$$d_{ij}+p_{ij}\leq 3n_{ij} \tag{1}$$

このとき，つぎの (2), (3) を示すことができる (変化時刻の数が枝を通って増える可能性があるのは,

テーブルの山パタンのときだけであることを注意する).

$$d'_{ij} + p'_{ij} \le d_{ij} + p_{ij}, \tag{2}$$

$$d_i + p_i \le \sum_{j=1}^{j=\delta_i} (d'_{ij} + p'_{ij}) + 3. \tag{3}$$

(1)〜(3) より，$d_i + p_i \le 3n_i$ を得る．よって，帰納法により，この命題が成り立つ． □

## 3. アルゴリズム

本論で提案するアルゴリズムの枠組みは以下の通りである．まず，出口 $t$ を想定し，その点への最速な輸送完了時間 $C(t)$ を計算し (Phase I)，想定される可能な出口の候補 $t'$ に対する輸送完了時間 $C(t')$ が最小な点 (最適な出口) を見出す (Phase II).

(Phase I) 適当な点を出口 $t$ とする．出口を決めれば，出口に向う各枝のフローの向きは一意に定まる ($G$ は $t$ を根とする内向木と見なされ，これによって，$G$ の各点の親子関係が定まる)．そこで，出口 (根) $t$ を決めると，すべての供給量を流しきる時間をできるだけ短くするためには，各点で自分の親にできるだけ早く流しきればよい．すべての与えられた供給量を $t$ へ流しきる時間 $C(t)$ は，根の到着テーブルから分かる．葉から送出・到着テーブルを帰納的に作ることにより，根 $t$ の到着テーブルを作る．

(Phase II) 根 $t$ の子 $v$ のうちで，$v$ から送出されるフローが $t$ へ到着し終る時刻が最も遅い子を $t'$ とする．(このとき，枝 $(t, t')$ を除去した後の $t$ を含む連結成分の点 $u$ の中には，それを出口としたときに $C(u) < C(t)$ となるものは存在しないことに注意.) 現在保持している $t'$ の送出テーブルと $t$ の到着テーブルから，$t'$ を新たに出口 (根) としたときの $t$ から $t'$ への送出テーブルと $t'$ の到着テーブルを作成する．

(a) $C(t) < C(t')$ のとき，$t$ が最適な出口であり，停止する．

(b) $C(t) \ge C(t')$ かつ $t$ から $t'$ へのフローが最も遅く到着完了するとき，$t'$ が最適な出口であり，停止する．

(c) その他のとき，$t \leftarrow t'$ として，(Phase II) の最初へ戻る．

## 4. 計算量

図 1 の点 $v_i$ の到着テーブルを作るときに必要な計算量について考えよう．点 $v_i$ の子 $v_{ij}$ ($j = 1, \cdots, \delta_i$) からの送出量のテーブルを $\tau(\{v_{ij}, v_i\})$ だけ遅延させて，テーブル $j$ とする．これらのテーブルの最初の変化時刻のうちで最小のものを探し，これを点 $v_i$ の到着テーブルの最初の変化時刻とする．以下同様にして，点 $v_i$ の到着テーブルが作成される．この手間は，テーブル $j$ ($j = 1, \cdots, \delta_i$) の変化時刻の総数 $\sum_{1 \le j \le \delta_i} d_{ij} (= \mathrm{O}(n)$(補題 1 より)) に比例する．また，この到着テーブルから点 $v_i$ の送出テーブルを $\mathrm{O}(n)$ 時間で作成できる．この作業を，葉から根 $t$ まで繰り返すと，(Phase I) における計算時間は $\mathrm{O}(n^2)$ となる．

つぎに，(Phase II) において，根 $t$ のテーブルから，その根 $t$ に隣接する点 $t'$ を新たな根としたときの $t$ から $t'$ への送出テーブルと $t'$ の到着テーブルを作るのに必要な計算量を考えよう．まず，現在保持している $t$ の到着テーブルから，$t'$ の送出テーブルによる $t$ への到着量を差し引いて，$t$ の到着テーブルを得る．これより $t$ から $t'$ への送出テーブルを求めることができる．さらに，これと $t'$ のもとの到着テーブルとを合わせることによって，新しい根 $t'$ の到着テーブルが作成できる．補題 1 より，この作業は $\mathrm{O}(n)$ 時間でできる．調べる出口 (根) の候補の数は高々$n-1$ であるので，結局，(Phase II) に要する時間は $\mathrm{O}(n^2)$ である．

したがって，最適な出口を求めるのに要する時間は $\mathrm{O}(n^2)$ である．

## 5. 結論

1-センターの配置問題の動的フロー版である，木構造の動的ネットワークにおける最適出口の配置問題に対する $\mathrm{O}(n^2)$ 時間のアルゴリズムを示した．なお，ここでは，各点で滞留可能としたが，そうでない場合でも，同じ出口が最適解である．また，連続時間の場合も同様に扱うことができる．さらに，これらの問題の他に，ある決められた時間内の流出量を最大にする出口の点を求める問題や，最適な出口集合の構造を吟味すること，より一般のネットワークを考えること，などが今後の課題として挙げられる．

## 参考文献

[1] B. Hoppe and É. Tardos: The quickest transshipment problem, *Mathmatics of Operations Research*, **25** (2000) 36–62.