2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

無閉路多端子ネットワークにおける最小極大制御不能流の研究

中央大学 *高橋 賢一郎 TAKAHASHI Kenichiro

1 はじめに

近年, 伊理[1], [7]によって提唱された制御不能流理論とは, 既存のネットワーク理論に初等的な閉路に沿っての単位流, 又はそれらの正係数の1次結合のみを対象とする制限をかけたものである. これにより既存の理論には無かった最悪の流れが定義できる.

従来のネットワーク理論では流れが自由に制御できることを前提として, 流れの最適解の導出が主な目的であった. 一方, 制御不能流理論におけるネットワークでは既存の流れの変更も逆流もできないため, 現在の(特に悪い)流れを調べる事に意義がある. また制御不能流についての文献としては, 他に[3]等もある.

一般の2端子ネットワークにおいての, 最小極大流を算出する問題については, 他の多くの問題[6]と同様に, NP完全性が証明されている[7]. しかし無閉路2端子ネットワークにおいてはNP完全性が証明されていない. そこで本稿では, 無閉路2端子ネットワークにおける最小極大流の値を算出する計算複雑性の解明と, 無閉路多端子ネットワークにおける最小極大流の考察をする.

2 諸定義

2.1 ネットワークの定義

グラフを $G=(V,E,\partial^+,\partial^-)$ で表す. ここで V は点集合, E は枝集合, $\partial^+: E\rightarrow V$, $\partial^-: E\rightarrow V$ は接続関数である. 次にネットワークを $N=(G,c,\xi)$ で表す. ここで, $c: E\rightarrow \mathbf{R}_+$ は容量関数, $c:\xi\rightarrow\mathbf{R}$ は流れ関数, $c(e)$ は $\forall e\in E$ の容量, $\xi(e)$ は $\forall e\in E$ の流れである. 任意の点 v の流出容量は $c^+(v)=\sum\{c(e)\mid\partial^+e=v\}$ であり, 任意の点 v の流入容量は $c^-(v)=\sum\{c(e)\mid\partial^-e=v\}$ である.

2.2 制御不能流の定義

無閉路2端子ネットワークの制御不能流とは

(a) 2端子流 ξ において, もし

$$\mathrm{supp}\,\xi=\{e\in E\mid\xi(e)\neq 0\}$$

が s から t への初等的な道であり, $\forall e\in E$ に関して $\xi(e)\geq 0$ かつ $\|\xi\|_{s,t}\geq 0$ であれば $N_{s,t}$ における2端子制御不能流である.

(b) $N_{s,t}$ において ξ_1,ξ_2 が2端子制御不能流であれば, 正実係数 α_1,α_2 による一次結合 $\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ も $N_{s,t}$ における2端子制御不能流である.

(c) 上記の(a)と(b)によって構築されるフローのみが2端子制御不能流である.

という3つの条件を満たすものである. 制御不能流理論における残余容量は正方向にのみ伝導的なものを対象にする. 一般の2端子ネットワーク上の流れが制御不能流になるかどうかの判定問題はNP完全である[9]. しかし無閉路2端子ネットワークにおけるフローは必ず制御不能流になる. また制御不能流とは s から t への初等的な有効道に沿っての単位流, または単位流の一次結合だから, それぞれの流れは互いに他の流れを変更することはない.

2.3 極大流

2端子実行可能制御不能流 ξ において, もしどんな2端子制御不能流 $\xi'(\neq 0)$ を選んでも $\xi+\xi'$ が実行可能でないとき, ξ は極大流という. またボトルネックカットを飽和する流れは必ず極大流となる. 極大流のうち, 流量最小の値を持つものが最小極大流である. よって, 最小ボトルネックカットを求めることは最小極大流を求めることに等しい[7]. なお[10]も参照.

2.4 ネットワークの結合と短縮

2端子ネットワークの2端子部分ネットワークが並列の場合, 並列枝のそれぞれの容量を足し合わせて, 合計の容量を持った枝1本への置換を結合, 2端子部分ネットワークが直列の場合, 直列枝の中で容量最小の枝の容量を持った枝1本への置換を短縮という[2]. 以後, 本稿ではできる限り結合と短縮を施したネットワークを考察の対象にする.

3 無閉路2端子ネットワーク

3.1 理想的な状態

無閉路2端子ネットワークにおいて最悪な状態の流れとは, 流れが最小極大流になっているときである. そこで最大流の値が最小極大流の値と等しいネットワークならば, ネットワークにどのようなフローを流して極大性を満たしても最大流を流せる. そのようなネットワークは理想的な無閉路2端子ネットワークである. 理想的な無閉路2端子ネットワークには以下の4つがある. ⟨1⟩ 容量増大ネットワーク: ネットワーク上の s,t を除いた各点において $\{v\mid c^-(v)<c^+(v)\}$ を満たすネットワーク; ⟨2⟩ 容量減少ネットワーク: ネットワーク上の s,t を除いた各点において $\{v\mid c^-(v)>c^+(v)\}$ を満たすネットワーク; ⟨3⟩ 容量不変ネットワーク: ネットワーク上の s,t を除いた各点において $\{v\mid c^-(v)=c^+(v)\}$ を満たすネットワーク; ⟨4⟩ 任意の並直列ネットワーク: すべての並列, 直列, または並直列なネットワーク.

3.2 1方向性無閉路2端子ネットワーク

無閉路2端子ネットワークのなかで

* 中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻(伊理研究室)
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
e-mail: ketakaha@iri-lab.ise.chuo-u.ac.jp

(a) s と t を除いたネットワーク上の各点は流入枝が複数で流出枝が1つの点(流入点), または流出枝が複数で流入枝が1つの点(流出点)のどちらかである.
(b) ネットワークから, 流出点から流入点への枝を全て取り除いたネットワークにおいて, 任意の s から t への道は流入点のみで構成されている(流入道)か, または流出点のみで構成されている(流出道).

という2つの条件を満たすものを1方向性の無閉路2端子ネットワークという. 1方向性のネットワークにおいて流出点と流入点を結んでいる枝を除くと, ネットワークは並直列ネットワークとなる. また並直列ネットワークの最小極大流の値は, 最大流の値に等しい. すなわちその枝が存在することにより, ネットワークの最小極大流の値は最大流の値より低くなる可能性がある. この枝を非並直列枝と呼ぶ. このネットワークでは, 最小極大流の値は最大流の値の $\frac{1}{2}$ より低くはなり得ないという性質を持っている.

証明: 最小極大流の値が最大流の値より低くなっている場合は非並直列枝にフローが流れて極大性を満たしている場合である. そのため非並直列枝をフローが流れ, 流入道だけで s から t へ流れているフローはなく, 同時に流出道だけで s から t へ流れているフローがない状態が, 最小極大流の値が最も低くなる可能性がある. そのようなネットワークは, 流入道の最大容量と流出道の最大容量が等しいネットワークである. このネットワークの最大流の値は, 流入道の最大容量の2倍である. 非並直列枝の容量が流入道の最大容量以上ならば, 最小極大流の値は低くても $\frac{1}{2}$ である. □

1方向性のネットワークにおいて最小極大流を求める計算時間は, 全ての枝に局所枝最適化を行うための最大流を求める時間に加え, 流出道の本数分の最大流を求める時間で済むので最大流を求めるアルゴリズム[5]にもよるが, 多項式時間で実行できる.

3.3 一般の無閉路2端子ネットワーク

一般の無閉路2端子ネットワークでは, 1方向性のときと違い, 非並直列枝とそうでない枝を明確に分けることができない. よって非並直列枝に優先的にフローを流すことで, 最小極大流を求めることはできない. 無閉路2端子ネットワークの最大の枝数は $\frac{n(n-1)}{2}$ になる.

4 無閉路多端子ネットワーク

無閉路多端子ネットワークとは複数の s と複数の t が存在するネットワークである. 無閉路という条件を満たせば, 任意の流れは制御不能流になる. 同一のネットワークでもフローの流し方により, 最小極大流の値が異なるので, 以下でフローの流し方を述べる. 多端子流や多品種流の文献としては[4], [8]がある.

4.1 多端子流

s 側から t 側にできるだけフローを流す方法. この方法の場合, 全ての s に $\{c(e)=\infty, \partial^+ e = s'\}$ という条件の枝を加え, 全ての t に $\{c(e)=\infty, \partial^- e = t'\}$ という条件の枝を加えると, 多端子ネットワークでの問題を s' から t' への2端子ネットワークの問題として考察できる.

4.2 多品種流

ある s にそれに対応する t を定め, 対応している点対にフローを流す方法. この方法では対応している点対にしかフローが流せないために最悪な流れを場合により変える必要がある. 悪い流れの算出のためのアプローチは以下の3つがある. (1) ある点対だけを対象にして, その点対のみの最小極大流を算出する方法, (2) s 群から t 群に全体として最大流に比べて, どれくらい少ない値の最小極大流が流れるかを算出する方法, (3) それぞれの点対を流れるフローの最大の値が, 全体として一番小さくなるようにする方法がある.

(1) においては, (a) 対象としている点対間に道がない場合, (b) 他の点対から流れているフローによりすでに, 実行可能なフローが流せない場合の2つの条件により最小極大流の最小値は0となる可能性がある.

5 おわりに

今後は §4.2 のアプローチ2を考察し, 悪い流れを研究する. 同時に無閉路2端子ネットワークにおける最小極大流を求めるアルゴリズムを検討する.

本研究を進めるにあたり, ご指導を頂いている伊理正夫教授には感謝いたします.

参考文献

[1] 伊理正夫: 制御不能流の理論と応用, **1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集**, pp.63–64, 1995.

[2] 高橋賢一郎: **無閉路2端子ネットワークの最小極大流の解法に関する研究**, 中央大学理工学部情報工学科1999年度卒業論文 (伊理研究室).

[3] 山口雅弘: **制御不能流に対する容量付きネットワークの特性**, 中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻1997年度修士論文 (伊理研究室).

[4] P. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin: *Network Flows, Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[5] Z. Galil: An $O(v^{\frac{5}{3}} e^{\frac{2}{3}})$ algorithm for the maximal flow problem, *Acta Infomatica*, Vol.14 (1980), pp.221–242.

[6] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability — A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[7] M. Iri: Theory of uncontrollable flows — A new type of network-flow theory as a model for the 21st century of multiple values, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.35, No.10 (1998), pp.107–123.

[8] B. Korte and J. Vygen: *Combinational Optimization — Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 2000.

[9] T. Matsui: Is a given flow uncontrollable?, *IEICE Transaction Fundamentals*, Vol.E79-A (1996), pp.448–451.

[10] Y. Yamamoto, I. Takahashi and M. Shigeno: *Minimum Maximal Flow Problem — An Optimization over the Efficient Set*, Discussion paper No.912, Institute of policy and planning sciences, University of Tsukuba, May 2001.