

DEA フロントアシフトへの Kruskal-Wallis 順位和検定の適用

01205520 東京理科大学 末吉 俊幸 SUEYOSHI Toshiyuki

02004240 東京理科大学 *青木 真吾 AOKI Shingo

1. はじめに

本研究では DEA(Data Envelopment Analysis)に時間による変化を付け加えた DEA 時系列分析に着目をし、時系列上の技術的变化を DEA の効率的フロンティアの動きで測定する新しい分析のフレームワークを構築することを目的とする。具体的には, Fare (1994) の DEA を用いた Malmquist index を計算するアプローチにノンパラメトリック統計検定を用いることで発展させた Window Malmquist Index の紹介を行う。

2. DEA による Malmquist Productivity Index の計算

本研究の基盤となる Malmquist Index は, 生産性の変化を測定する研究で頻繁に用いられている数量指数である。図 1 は 1 入力(x) — 2 出力(y₁, y₂)の生産活動が行われている状況下の t 期と t+1 期の時系列データを図解したものである。

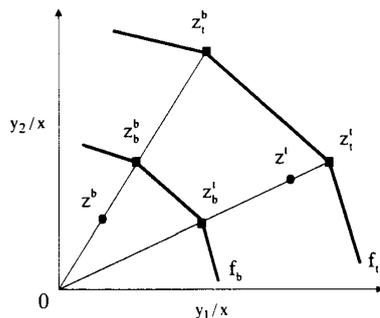


図 1: 2 期間のフロンティア・シフトの例
 分析対象となる事業体の各期におけるパフォーマンスはそれぞれ z^t, z^{t+1} で表わされ, 2 つの曲線 f_t, f_{t+1} は「規模に関する収穫が一定」の条件による各期の効率的フロンティアを示している。Färe 等 (1994) によると, t 期から, t+1 期への技術的变化(フロンティア・シフト)を測定する出力指向型 Malmquist Productivity Index (MI_t^{t+1}) は図 1 内の記述を用いて次のように表わされる。

$$MI_t^{t+1} = \left[\frac{oz_{t+1}^t \cdot oz_{t+1}^{t+1}}{oz_t^t \cdot oz_t^{t+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

(1) 式は DEA 効率値の表記法を用いると, 次のように置き換えられる。

$$MI_t^{t+1} = \left[\frac{TSE^t}{IEI^{t+1 \rightarrow t}} \cdot \frac{IEI^{t \rightarrow t+1}}{TSE^{t+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

TSE と IEI の測定

TSE (Technical Scale Efficiency) と IEI (Intertemporal Efficiency Index) を測定するにあたり, 各期毎に n 個の $DMU_j (j=1, \dots, n)$ が存在し, 各 DMU は m 個の入力 ($x_{ij}, i=1, \dots, m$) と s 個の出力 ($y_{ij}, r=1, \dots, s$) によってそのパフォーマンスが特徴付けられているとする。また, 期間を明らかにするために, t 期の DMU 集合を J_t とする。

t 期における k 番目の DMU ($j \in J_t$) の TSE^t は次の(3)式を解くことで求められる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \phi \\ & \text{subject to } \sum_{j \in J_t} x_{ij} \lambda_j + d_i^x = x_{ik}, \quad (i=1, \dots, m, \text{ and } k \in J_t) \\ & \phi y_{rk} - \sum_{j \in J_t} y_{rj} \lambda_j + d_r^y = 0, \quad (r=1, \dots, s, \text{ and } k \in J_t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\phi: \text{free}, \lambda_j \geq 0 (j \in J_t), d_i^x \geq 0 (i=1, \dots, m) \text{ and } d_r^y \geq 0 (r=1, \dots, s).$$

ここで, 変数 λ_j は DMU を凸結合する変数であり, d_i^x は入力の過剰量を表すスラック, d_r^y は出力の不足量を表すスラックである。(3)式の最適目的関数の逆数が TSE^t となる。

同様に $IEI^{t+1 \rightarrow t}$ は次の(4)式を解くことで求められる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \phi \\ & \text{subject to } \sum_{j \in J_b} x_{ij} \lambda_j + d_i^x = x_{ik}, \quad (i=1, \dots, m, \text{ and } k \in J_t) \\ & \phi y_{rk} - \sum_{j \in J_b} y_{rj} \lambda_j + d_r^y = 0, \quad (r=1, \dots, s, \text{ and } k \in J_t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\phi: \text{free}, \lambda_j \geq 0 (j \in J_b), d_i^x \geq 0 (i=1, \dots, m) \text{ and } d_r^y \geq 0 (r=1, \dots, s).$$

(4)式の最適目的関数値の逆数が $IEI^{t+1 \rightarrow t}$ 値となる。

$IEI^{t \rightarrow t+1}$ は(4)式の t と t+1 を入れ替えて計算することができる。

この Index はフロンティアが成長している, または変わらないという想定のもと作られており, 多期間のフロンティアシフトを測定するには非常に注意が必要である。

3. Window Malmquist Approach

多期間のフロンティアシフトを測定する際, DEA 効率的フロンティアは時系列上で常に一定方向へシフトするとは限らず, フロンティア・シフトが発生しなかったり, 2 期のフロンティアがクロスするなど,

実際の分析に際しては複雑な状況が考えられる。このような状況に対応するアプローチとして、DEAとノンパラメトリック統計検定を組合せた時系列分析と、複数の期間のフロンティアを合成して計算する新しいタイプの Malmquist Index を提案する。

3.1 Kruskal-Wallis 順位和検定の適用

ノンパラメトリック統計検定を用いて、フロンティアシフトが起こっているのかを検定する。DEAとKruskal-Wallis 順位和検定は以下の Step によって組み合わされる。ただし、本研究では b 期から t 期までのフロンティアのシフトを想定しており、b 期から t 期までの各期は $p (= b, b+1, \dots, t-1, t)$ で指定されるものとする。

Step 0: 以下の帰無仮説 H_0 を立てる。

H_0 : 観測した期間中フロンティアシフトは起こっていない。

Step 1: (3)式を用いて p 期の全 DMU (n 個) の TSE 値を測定する。そして、非効率と判定された DMU (TSE 値が 100% 未満) を以下の(5)式を用いて p 期の効率的フロンティア上へ射影する。

$$\begin{aligned} x_{ik} &\Rightarrow x_{ik} - d_i^x \\ y_{rk} &\Rightarrow \phi^* y_{rk} + d_r^y \end{aligned} \quad (5)$$

Step 2: b から t までの各期の効率的フロンティア上に射影されたデータを 1 つにまとめ、1 つのクロスセクションデータとして(3)式を解き、N 個

($= n(t-b+1)$) の射影された DMU の TSE 値を測定する。

Step 3: Step 2 より得られる TSE 値より、射影された全 DMU の順位付けを行う。一番小さな TSE 値をとった DMU の順位 R を 1、最も大きい値をとった DMU の順位 R を N とする。

Step 4: p 期の順位和 $w_p (= \sum_{j \in J_p} R_j)$ を求め、以下の(6)式より統計量 H を求める。

$$H = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{p=b}^t \frac{W_p^2}{n} \right] - 3(N+1) \quad (6)$$

統計量 H は自由度 $\phi = t-b$ の χ^2 分布に近似して従うことが知られており、

もし、 $H \geq \chi_{\alpha}^2$ であるなら、帰無仮説 H_0 は危険率 $\alpha\%$ (片側) で棄却される。

期間の特定 (Kruskal-Wallis 多重比較検定)

帰無仮説が棄却された場合はどの期間でシフトが起こっていないのかを特定する必要がある。よって新たに以下の帰無仮説 $H_0^{\#}$ を立てる。

$H_0^{\#}$: p 期と p' 期の間でフロンティアシフトは起こっていない。

この帰無仮説 $H_0^{\#}$ は以下の統計量 $H^{\#}$ を求めることによって検定できる。

$$H^{\#} = \left| \frac{W_p - W_{p'}}{n} \right| / \sqrt{\frac{N(N+1)(N-1-H)}{6n(N-t+b-1)}} \quad (7)$$

もし、 $H^{\#} \geq t_{\alpha}$ であれば帰無仮説は危険率 $\alpha\%$ で棄却される。ここで、この t_{α} は自由度 $(N-t+b-1)$ で、危険率 α (両側) の t 値を表している。

3.2 Window Malmquist Index

多期間のフロンティアシフトを測定する際、期間中フロンティアシフトが認められても、例えば連続する期間 (t 期と t-1 期) ではシフトが認められない場合が考えられる。この理由として効率的フロンティアがクロスしたり (図 2)、フロンティアの動きが統計的に微小であるということが考えられる。そこで 1 期毎のフロンティア・シフトをつかむのが困難な場合を対処するために、基準期 (b 期) と 2 期合成によって構成される比較期 (t-1 期と t 期) の Malmquist Productivity Index を計算し、フロンティアの動きをつかむ。すなわち、図 2 において、2 期間合成の比較期の効率的フロンティアは $z_t^1 - z_t^2 - z_{t+1}^3 - z_{t+1}^4$ と考える。この合成されたフロンティアを基準とした Malmquist Index を Window Malmquist Index と称し、以下の(8)式で記述する。

$$WMI_b^t = \left[\frac{TSE^b}{IEI^{t \rightarrow b}} \cdot \frac{IEI^{b \rightarrow t-1} U_t}{TSE^{t-1} U_t} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

なお、 $TSE^{t-1} U_t$ と $IEI^{b \rightarrow t-1} U_t$ の計算は (3)、(4)式の制約条件 $j \in J_t$ を $j \in J_{t-1} \cup J_t$ と変更することにより解くことができる。

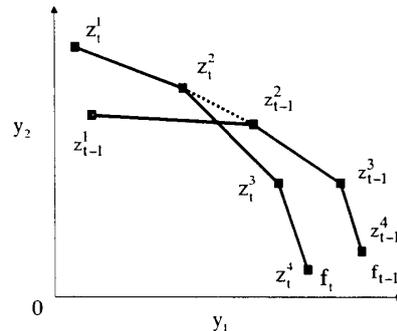


図 2: 2 期のフロンティアがクロスしている例

4. まとめ

本研究では、DEAとMalmquist Index そしてノンパラメトリック検定を組合せた新しい時系列分析のアプローチを紹介した。従来のアプローチにはなかった統計的な分析を組み込んでおり、DEAの時系列分析のフレームワークを拡張しただけでなく、DEAとノンパラメトリック検定の組合せというDEAの幅を広めることができたと言える。