2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

AHPにおける一般平均法のパラメータと誤差

01104400　法政大学　　加藤 豊　KATO Yutaka
01007500　慶応義塾大学　＊小澤 正典　OZAWA Masanori

1. はじめに

階層化意思決定法 (AHP) においては，評価項目や代替案のウェイトを推定する作業が，繰り返し行われる．そのウェイトを推定する際に，固有値法が一般的に使用されているが，推定法はそれ以外にも幾何平均法や一般平均法などがある．本研究では，一対比較行列に含まれる誤差が，ウェイトに関して系統的に含まれるときのウェイトの推定法について考察する．

2. ウェイトの推定法

一対比較におけるウェイトの推定法は，最適化問題の解として解釈することができる．ここでは，reciprocal 性 ($a_{ji} = 1/a_{ij}$) を仮定する．

1. 幾何平均法 (最適化問題)

$$\min_{w_i} \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\log a_{ij} - \log \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \log w_i = 0 \quad \left(\prod_{i=1}^{n} w_i = 1 \right)$$

・ウェイトの推定
各ウェイトを次式 (幾何平均) より求め，和を1に基準化する．

$$\hat{w}_i = \sqrt[n]{a_{i1} \cdots a_{in}} , \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

2. 一般平均法 (最適化問題)

$$\min_{w_i} \frac{1}{2n^2 \cdot r^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left((\sqrt{a_{ij}} w_j)^{-r} - (\sqrt{a_{ji}} w_i)^{-r} \right)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^{-r} \right)^{-\frac{1}{r}} = 1$$

なお，最適解における目的関数の値は，$\frac{1}{r^2}(S^r - 1)$ となる．

・ウェイトの推定
各ウェイトを次式 (一般平均) より求め，和を1に基準化する．

$$\hat{w}_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^r \right)^{\frac{1}{r}} , \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

この方法で，$r \to 0$ とするならば，その推定したウェイトは幾何平均法と同じになる．

3. 一対比較の誤差

一対比較をしたときの誤差がどのようにその要素に含まれるかにより，その推定方法も違うべきである．いま，一対比較行列の各要素に含まれる誤差を δ_{ij} とし，その要素が $\delta_{ij} w_i / w_j$ という形で表せるものと仮定する．また，各比較要素における誤差が0以上であるとしよう．さらに，誤差が1より大きくなることと，1より小さくなることが同等に起こるものとする．

このとき，一対比較要素について対数をとると，対称要素はその逆数になっていることより，誤差分布の対数をとったものは平均が0の対称な分布になる．このような対称要素が逆数となる分布には，対称な分布を指数関数で変換したものなどいろいろあり，対数正規分布などが代表的な例である．

・変換関数例

$$f_{\exp}(x) = \exp(ax),$$

$$f_p(x) = \left\{ \sqrt{1 + g(x)^2/4} + g(x)/2 \right\}^r$$

ここで，$g(x)$ は単調増加な奇関数であり，r は0以外の任意の実数．この関数の逆関数は，つぎの通りである．

$$f_{\exp}^{-1}(x) = \log(x)/a$$

$$f_p^{-1}(x) = g^{-1}\left((x^{1/r} - 1/x^{1/r})/2 \right)$$

幾何平均法は，reciprocal 性を仮定して，各要素の対数についての最小2乗和を計算している方法である．それゆえ，その誤差分布にもよるが，一般平均法においてはパラメータの値が0の場合 (幾何平均法) が他の値の場合よりも，推定したウェイトは真の解からの距離が小さくなることが多い．

つぎの図1,2は，誤差分布が正規分布，三角分布，一様分布のときに変換関数として $f_{\exp}, f_p$ を使用した場合において，一般平均法のパラメータの値と推定したウェイトから真のウェイトへの距離の関係をシミュレーションにより求めた図である．横軸は一般平均法におけるパラメータの値で，縦軸は推定したウェイトから真の解への距離が最小となった場合の度数を示している．

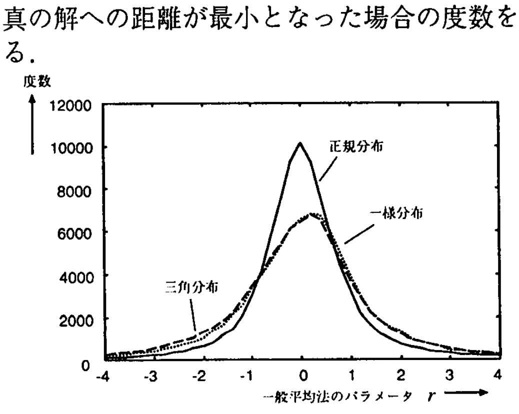

図: 1 : 変換関数 $f_{\exp}$ の場合 ($a = 1$)

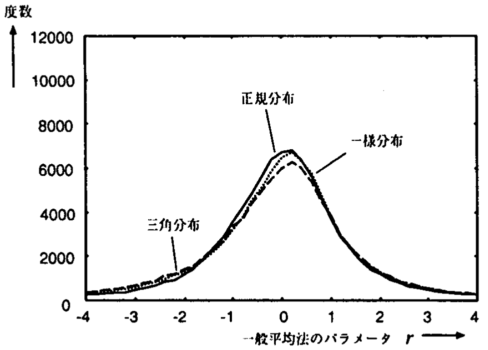

図: 2 : 変換関数 f_p の場合 $(g(x) = x, r = 1)$

このように誤差が，ウェイトに独立でありそのときにreciprocal 性を仮定すると，幾何平均法がすぐれていることが分かるが，一対比較値は人間が値を定めているので，その値が必ずしもウェイトと独立であると仮定することはできない．

4. 一般平均法と系統的誤差

そこで，本研究では一対比較する際に，系統的な誤差を含む場合を考える．いま，その一対比較の誤差が，その比較値によって変化する場合について考察する．これは，一対比較する際にその比較対象だけで比較できればよいが，全体の値をふまえてその比較値を付け直す可能性があるからである．

ここでは，系統的な誤差の仮定として，一対比較したときにまず始めに確率的な誤差が付加され，そのつぎにその値によった誤差が加わるものとする．つまり，

$a_{ij} = f(\delta_{ij} \cdot w_i/w_j).$

とし，関数 f としては，つぎようなものを考える．

1. 指数関数型

   $f(x) = b\exp(ax) + c$

2. 対数関数型

   $f(x) = a\log(x - 1 + b) + c$

3. ベキ関数型

   $f(x) = bx^a + c$

これらの系統的な誤差を考えたときに，各推定方法によるウェイトの性質をシミュレーションにより調べた．つぎの図 3,4,5 は，各関数 $(b = 1, c = 0)$ において δ_{ij} として対数正規分布（$N(0, 0.05)$）を使用した場合の図である．横軸は一般平均法におけるパラメータの値であり，縦軸は真の解からの距離が最小となったときの度数を示す．

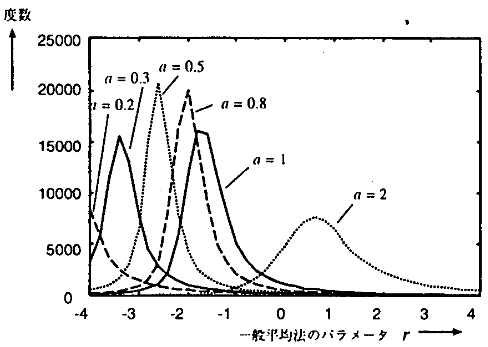

図: 3 : 対数関数型の場合

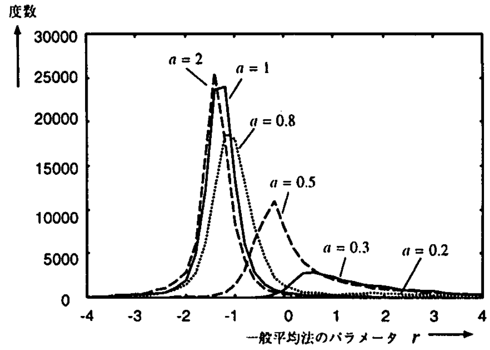

図: 4 : 指数関数型の場合

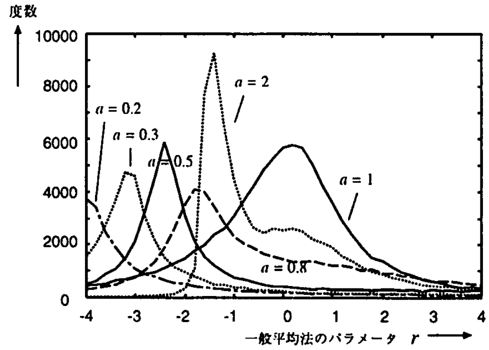

図: 5 : ベキ関数型の場合

系統的な誤差を持つ場合には，比較値が小さいときにそれが拡大されるような場合や逆に大きいときにそれが縮小されるような場合は，一般平均法のパラメータの値が負のときがよく，ある程度定数倍されるような場合は，パラメータの値は正のときがよい．幾何平均がよいときは，確率的な誤差の分散が大きい場合で，その誤差のほとんどが確率的な誤差によるからである．

5. まとめ

1. 幾何平均法の優秀性

   項目数や代替案が多い場合には，幾何平均法 (パラメータの値が 0 である一般平均法) が一般的に言ってよい．

2. 系統的誤差を持つ場合

   系統的な誤差を持つ場合には，一般平均法のパラメータの値により真のウェイトからの距離が違ってくるが，パラメータの値が負の場合に距離が小さくなる場合が多い．

3. 実データからの解析の必要性

   一般平均法が有効な場合についての検証が，必要である．

参考文献

[1] T.L. Saaty, “The Analytic Hierarchy Process”, McGraw-Hill, 1980.

[2] 刀根 薫, “ゲーム感覚意見決定法”, 日科技連出版, 1986.

[3] 加藤豊，小澤正典, “AHP における一対比較の整合性の評価”, 日本 OR 学会 2000 年度春季研究発表会アブストラクト集, pp106-107,2000

[4] Kato,Y, Ozawa,M “The characteristics of the consistency function of the general mean method”, Proceedings of ISAHP’99, pp77-82, 1999.