1機械，1種類ジョブの最適バッチスケジューリング

02701774　神戸商科大学大学院　＊　柳井 秀三　YANAI Shuzo
01105053　神戸商科大学商経学部　菊田 健作　KIKUTA Kensaku
01503164　神戸商科大学商経学部　濱田 年男　HAMADA Toshio

1. はじめに

ジョブを1台の機械によりバッチ処理する問題で，評価尺度が総滞留時間最小化である問題は，Santos, Magazine [1] により定式化された．その後，様々な解析がされてきた．その中でも，同一種類のジョブを扱ったものは,Naddef,Santos[2],Coffman 他 [3] の特別な場合，Shallcross[4] がある．これらの研究から，問題が多項式時間のアルゴリズムで解けることがわかっている．

同一種類のジョブをバッチ処理するとき，もし，段取時間が無ければ，ジョブをバッチにまとめないスケジュールが，また加工時間が0ならばすべてのジョブを1つのバッチにまとめることが各々総滞留時間を最小にすることは明らかである．本報告では段取時間と加工時間との関係に注目し特別な場合の最適バッチジョブスケジューリングを求め，その性質を示すことを目的としている．

2. モデル

本研究で扱うモデルは以下に示すとおりである．

(1) 1機械を用いて同一種類の $n(\geq 2)$ ジョブを加工する．

(2) ジョブの加工は中断できない．

(3) 各ジョブの加工時間 p_i はジョブの種類が同一であることからすべてのジョブで $p_i = p = 1(i = 1,...,n)$ であるとする．

(4) 1回の段取りで1個以上のジョブをまとめて加工する．

(5) 段取り時間は s であるとする．

(6) 同一バッチ内のジョブの完了時刻はすべて同じであり，同一バッチ内の最後のジョブが完了する時刻である．

(7) ジョブの滞留時間は時刻0からそのジョブの完了時刻であるとする．

(8) 目的はすべてのジョブの滞留時間の総和を最小にすることである．

(9) $(k_1,..,k_i,...,k_j)$：加工順序 i 番目バッチサイズが k_i であるようなバッチジョブスケジュール．

(10) $B(s;k_1,..,k_j)$: バッチジョブスケジュール $(k_1,..,k_i,...,k_j)$ の総滞留時間．

(11) バッチサイズはバッチの加工順序で非増加列で与えられることから [3], $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_i \geq \cdots \geq k_j \quad (1 \geq i \geq j)$ と仮定する．

3. 最適バッチスケジューリング

もし，$s=0$ ならばジョブをバッチにまとめないスケジュールが最適であることが明らかなことから，s が何処まで増加すればバッチを形成した方が有利になるかを考察する．

$$B(s;1,..,1) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}(is+i) = \frac{n(n+1)}{2}(s+1)$$

$$\begin{aligned} &B(s;k_1,..,k_j) \\ &\quad = \quad B(s;1,..,1) \\ &\qquad +\sum_{i=1}^{j}\left[(k_i-1)\left\{\frac{k_i}{2}-(n-\sum_{l=1}^{i-1}k_l-\frac{k_i}{2})s\right\}\right] \end{aligned}$$

従って，加工順序 l 番目のバッチサイズによる総滞留時間に対する影響に注目すると，
$k_l \geq 2$ ならば,

$$s \quad > \quad \frac{k_l/2}{n-\left(\sum_{i=1}^{l-1}k_i+k_l/2\right)} \qquad (1)$$

という関係が成り立てば，$B(s;k_1,k_2,..,k_j)$ は $B(s;1,1,..,1)$ よりも小さくなる．(1) の右辺の値を最小にするには，k_l 番目のバッチ数が2以上のとき，分子が1，分母が $n-1$ の時であることが明らかであることから，$k_1=2$ であり，残りのジョブを一つづつバッチにまとめたスケジュールである．よって，以下の性質が導かれる．

性質 1 $n \geq 2$ に対して，もし段取時間と加工時間との関係が $s < \frac{p}{n-1}$ ならば，$(1,1,\dots,1)$ というスケジュールが総滞留時間を最小にする．

性質1の上の説明から，$s > \frac{p}{n-1}$ でかつ，s が $\frac{p}{n-1}$ に近いとき，$B(s;1,1,..,1)$ よりも小さくなるスケジュールは $(2,1,..,1)$ であることは明らかである．

$$B(s;2,1,..,1) \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}(s+1)-(n-1)s+1$$

であり，もし $s = \frac{p}{n-1}$ ならば，

$$B(s;1,1,..,1) = B(s;2,1,..,1)$$

となることがわかる．$k_1 \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} & B(s;k_1,\dots,k_2) \\ &= b_2(s)+(k_1-2)\left\{\frac{k_1+1}{2}-(n-\frac{k_1+1}{2})s\right\} \\ &\quad +\sum_{i=2}^{j}\left[(k_i-1)\left\{\frac{k_i}{2}-(n-\sum_{l=1}^{i-1}k_l-\frac{k_i}{2})s\right\}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

(2) の右辺第二項において $k_1 > 2$ のとき，最も多く s の数を減少させ，加工時間の増加を抑えるのは $k_1 = 3$ のときであり，右辺第三項においては $k_2 = 2$ の時であり，それぞれを比較すると，

$$B(s;2,2,1,..,1) = B(s;2,1,..,1)-\{1-(n-3)s\}$$

$$B(s;3,1,1,..,1) = B(s;2,1,..,1)-\{2-(n-2)s\}$$

であることから，以下の性質を導くことができる．

性質 2 $n \geq 4$ に対して，もし $\frac{p}{n-1} < s < \frac{p}{n-3}$ ならば，$(2,1,1,..,1)$ であるスケジュールが総滞留時間を最小にする．

次にすべてのジョブを1つのバッチにまとめたスケジュール：(n) の総滞留時間が最小となる場合を考える．性質1,2と同様の議論で，最も多く加工時間を減少させ，s を最も少なく増加させるのは $n-1$ ジョブを加工順序1番目のバッチにまとめ，2番目に1ジョブをバッチにまとめたスケジュールであることは明らかである．

$$\begin{aligned} B(s;n) &= n(s+n) \\ B(s;n-1,1) &= B(s;n)-(n-1)+s \end{aligned}$$

であることから，以下の性質を導くことができる．

性質 3 $n \geq 2$ に対して，もし段取時間と加工時間との関係が $s > p(n-1)$ ならば，ジョブのすべてを1つのバッチにまとめたスケジュールが総滞留時間を最小にする．

性質3の上の説明から s のとる値が $s > p(n-1)$ でかつ，s が $p(n-1)$ に近いとき，最適となるスケジュールは $(n-1,1)$ であることは明らかである．次に最も多く加工時間を減少させ，s の増加を抑えるスケジュールは，$(n-2,2)$ のスケジュールか，$(n-2,1,1)$ のスケジュールである．よって，

$$\begin{aligned} B(s;n-2,2) &= B(s;n-1,1)-(n-3)+s \\ B(s;n-2,1,1) &= B(s;n-1,1)-(n-2)+2s \end{aligned}$$

であることから，以下の性質を導くことができる．

性質 4 $n \geq 4$ に対して，もし段取時間と加工時間との関係が $(n-3)p < s < (n-1)p$ ならば，$(n-1,1)$ というスケジュールが総滞留時間を最小にする．

4. 動的計画法による分析

本研究で示した性質は，以下に示すような動的計画法による分析の過程で得られた．紙面の都合上，詳細は当日の発表で説明する予定である．$f_n(s)$ を加工時間1，段取時間 s であるときの滞留時間の総和の最小値とすると，次のような再帰方程式が成立する．

$$\begin{aligned} f_0(s) &= 0 \\ f_n(s) &= \min_{1\leq k\leq n}\{n(s+k)+f_{n-k}(s)\} \end{aligned}$$

参考文献

[1] C.Santos and M.Magazine, Batching in operation manufacturing system, *Operations Research Letters*, **4**, (1985), 99-103.

[2] D.Naddef and C.Santos, One-pass batching algorithms for the one-machine problem, *Discrete Applied Mathematics*, **21**, (1988), 133-145.

[3] E.G.Coffman,Jr, and A.Nozari. M.Yannakakis, Optimal scheduling of products with two subassemblies on a single machine, *Operations Research*, **37**, (1989), 426-436.

[4] D.F.Shallcross, A polynomial algorithm for a one machine batching problem, *Operations Research Letters*, **11**, (1992), 213-218.